

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR

Introdução à Álgebra Linear

Copyright ©2022 Abramo Hefez e Cecília S. Fernandez

Direitos reservados pela Sociedade Brasileira de Matemática.

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98). Impresso Maio 2022

Sociedade Brasileira de Matemática

Presidente: Paolo Piccione

Vice-Presidente: Jaqueline Godoy Mesquita

Diretores: Walcy Santos

Jorge Herbert Soares de Lira

Daniel Gonçalves

Roberto Imbuzeiro

Editor Executivo

Ronaldo Alves Garcia

Assessor Editorial

Tiago Costa Rocha

Coleção PROFMAT

Comitê Editorial da Coleção PROFMAT

Hilário Alencar (Editor-Chefe)

Marcela Souza (Editora-Adjunta)

Mariana Cassol

Paulo Leandro Dattori

Vanderlei Horita

Projeto gráfico e capa

Pablo Diego Regino

Editoração Eletrônica

Yunelsy Nápoles Alvarez

Distribuição e vendas

Sociedade Brasileira de Matemática

Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro RJ

Telefones: (21) 2529-5073

<http://www.sbm.org.br> / [email:lojavirtual@sbm.org.br](mailto:lojavirtual@sbm.org.br)

ISBN 978-85-8337-167-0

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Hefez, Abramo

Introdução à álgebra linear / Abramo Hefez, Cecília S. Fernandez. – 3. ed. – Rio de Janeiro, RJ : Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

ISBN 978-85-8337-167-0

1. Álgebra linear 2. Álgebra linear - Estudo e ensino 3. Matemática I. Fernandez, Cecília S. II. Título.

21-77355

CDD-512.507

Índices para catálogo sistemático:

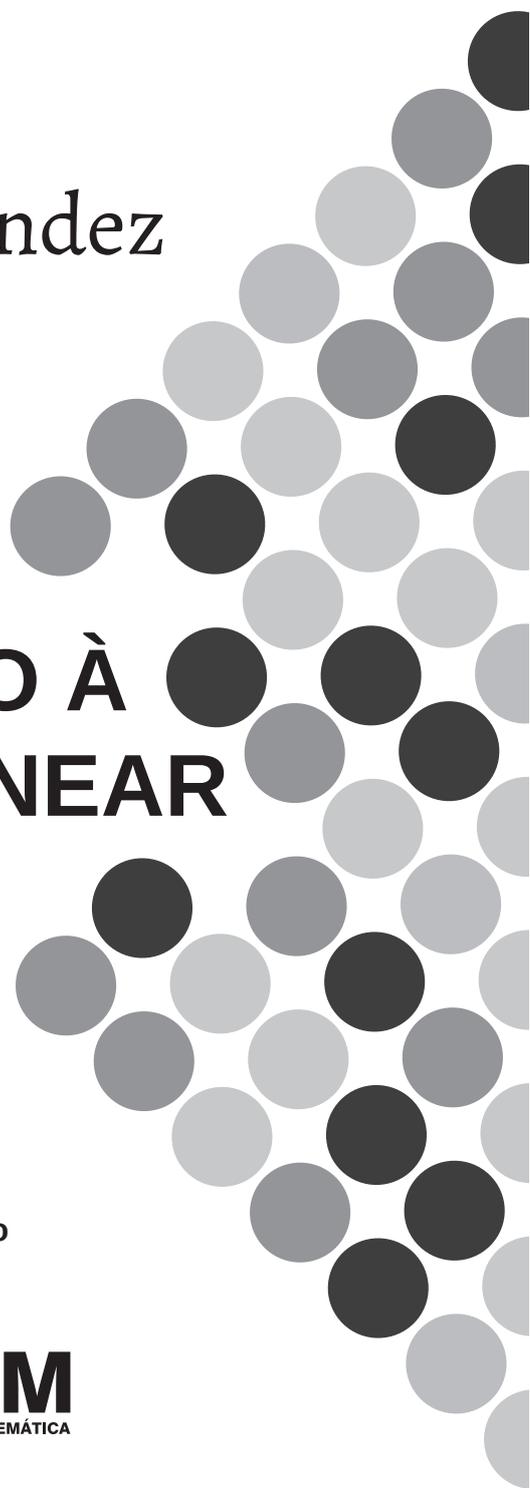
1. Álgebra linear : Matemática : Estudo e ensino 512.507
Eliete Marques da Silva - Bibliotecária - CRB-8/9380

Abramo Hefez
Cecília S. Fernandez

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR

3ª edição
2022
Rio de Janeiro

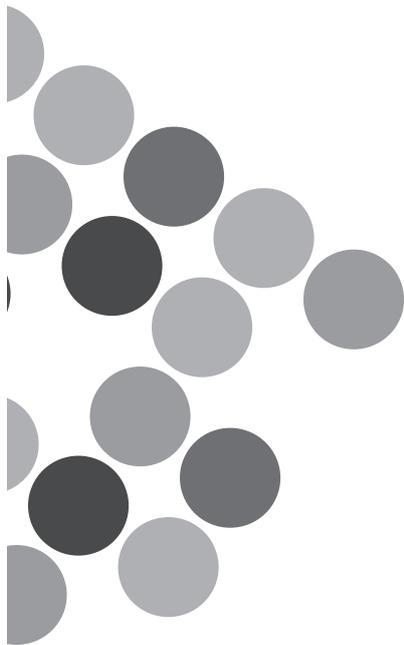
 **SBM**
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA



*À Maria Lúcia.
(AH)*

*À Ana Cecília
e à Belmira.
(CSFZ)*

Sumário



Sumário

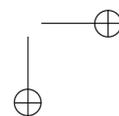
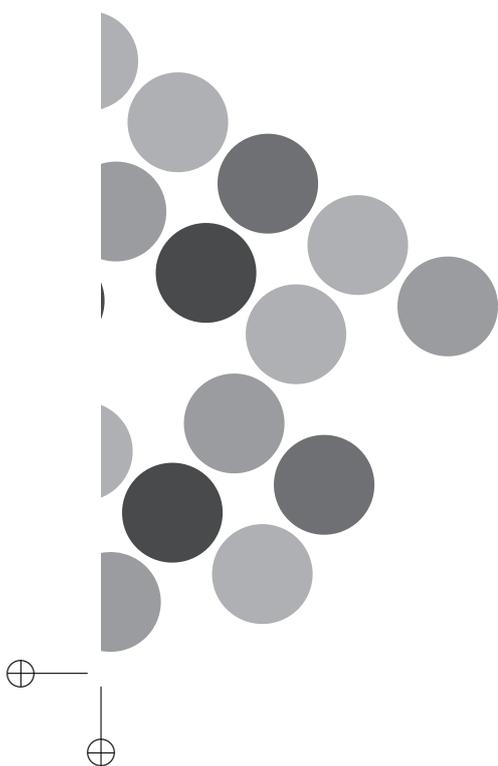
Prefácio	xi
1 Sistemas Lineares e Matrizes	1
1.1 O que é Álgebra Linear?	2
1.1.1 Corpos	2
1.1.2 Espaços Vetoriais	4
1.1.3 Sistemas de Equações Lineares	7
Exercícios	11
1.2 Matrizes	12
1.2.1 A Definição de Matriz	12
1.2.2 Operações com Matrizes	14
1.2.3 Matriz Inversa	20
Exercícios	22
2 Transformação de Matrizes e Resolução de Sistemas	27
2.1 Transformação de Matrizes	28
2.1.1 Transformações Elementares de Matrizes	28
2.1.2 Forma Escalonada de uma Matriz	30
2.1.3 Matrizes Elementares e Aplicações	33
Exercícios	37
2.2 Resolução de Sistemas Lineares	39
Exercícios	49
3 Espaços Vetoriais	53
3.1 Subespaços Vetoriais	54
3.1.1 Caracterização dos Subespaços Vetoriais	54
3.1.2 Operações com Subespaços	56
3.1.3 Subespaços Gerados	59
Exercícios	63
3.2 Dependência e Independência Linear	65
Exercícios	69
3.3 Bases e Dimensão	70
3.3.1 Bases	70
3.3.2 Dimensão	77
Exercícios	79
3.4 Espaço Linha de uma Matriz	81
Exercícios	84

4	O Espaço \mathbb{R}^3	87
4.1	Retas e Planos em \mathbb{R}^3	89
4.1.1	Retas em \mathbb{R}^3	89
4.1.2	Planos em \mathbb{R}^3	95
	Exercícios	100
4.2	Posições Relativas	102
	Exercícios	104
4.3	Determinantes e Geometria	105
4.3.1	Determinantes	106
4.3.2	O Produto Vetorial	109
	Exercícios	114
5	Transformações Lineares	117
5.1	O que são as Transformações Lineares?	118
	Exercícios	123
5.2	Núcleo e Imagem	124
5.2.1	O Núcleo	124
5.2.2	A Imagem	126
5.2.3	O Teorema do Núcleo e da Imagem	127
	Exercícios	135
5.3	Operações com Transformações Lineares	137
	Exercícios	140
6	Transformações Lineares e Matrizes	143
6.1	Matriz de uma Transformação Linear	144
	Exercícios	149
6.2	Operações com Transformações Lineares e Matrizes	151
	Exercícios	155
6.3	Operadores Lineares em \mathbb{R}^2 e em \mathbb{R}^3	156
	Exercícios	162
6.4	Mudança de Base e Matrizes Semelhantes	162
	Exercícios	166
7	Espaços com Produto Interno	169
7.1	Produto Interno	170
	Exercícios	172
7.2	Ângulos entre Vetores e Ortogonalidade	173
	Exercícios	178

Sumário

7.3	Bases Ortonormais	180
7.3.1	Conjuntos Ortogonais	180
7.3.2	Ortogonalização de Gram-Schmidt	183
	Exercícios	188
7.4	Operadores em Espaços com Produto Interno	189
7.4.1	O Operador Adjunto	190
7.4.2	Operadores Ortogonais	193
	Exercícios	198
8	Determinantes	201
8.1	Propriedades dos Determinantes	202
8.1.1	Propriedades Características	202
8.1.2	Propriedades Adicionais das Funções D	203
8.1.3	Propriedade Multiplicativa	206
	Exercícios	207
8.2	Existência de Determinantes	208
	Exercícios	210
8.3	Matriz Adjunta	213
	Exercícios	216
8.4	Regra de Cramer	217
	Exercícios	219
9	Diagonalização de Operadores	221
9.1	Autovalores e Autovetores	222
	Exercícios	226
9.2	Polinômio Característico	227
	Exercícios	237
9.3	Diagonalização de Operadores	237
	Exercícios	243
9.4	O Teorema Espectral para Operadores Simétricos	244
	Exercícios	247
9.5	Reconhecimento de Cônicas	247
	Exercícios	253
10	Soluções e Respostas	255
	Bibliografia	287
	Índice Remissivo	289

Prefácio



Este material foi produzido para ser utilizado como livro-texto da disciplina *Introdução à Álgebra Linear* do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) e, por suas características, pode também ser utilizado com proveito em cursos universitários.

O pré-requisito para a leitura deste livro é a disciplina Geometria Analítica, pois já se supõe que o leitor tenha familiaridade com os conceitos de reta e plano em \mathbb{R}^3 e também com as noções de elipse, hipérbole e parábola.

Esta obra divide-se em dez capítulos, onde são apresentados os conceitos fundamentais da Álgebra Linear. Optamos por uma abordagem que vai do concreto ao abstrato. Mais precisamente, nos dois primeiros capítulos, discutimos a resolução dos sistemas de equações lineares por meio do escalonamento das matrizes a eles associadas, como motivação para os conceitos mais abstratos que se seguirão. No terceiro capítulo, introduzimos os espaços vetoriais, bem como as noções fundamentais de subespaço, de base e de dimensão, noções essas básicas da Álgebra Linear. No Capítulo 4, vemos como esses conceitos interpretam-se, geometricamente, no espaço tridimensional. No Capítulo 5, são estudadas as funções naturais entre espaços vetoriais; a saber, as transformações lineares. No Capítulo 6, relacionamos as transformações lineares às matrizes que na prática as representam. Em particular, fazemos um estudo mais detalhado das transformações lineares do plano e do espaço tridimensional. No Capítulo 7, são estudados os espaços com produto interno, onde se podem definir distâncias e ângulos. Em suma, são os espaços em que é possível desenvolver uma geometria métrica. São ainda estudadas algumas transformações lineares com comportamento especial relativamente ao produto interno. O Capítulo 8 é dedicado ao clássico assunto determinantes de matrizes quadradas, que introduzimos de um modo mais intrínseco, a partir de suas propriedades, em vez de exibir sua expressão explícita em termos de somas alternadas de produtos das entradas das matrizes. Tal expressão torna-se desnecessária para determinantes de matrizes de ordem maior do que três, pois todas as propriedades dos determinantes são deduzidas a partir de três propriedades básicas e do desenvolvimento de Laplace. O Capítulo 9 trata das importantes noções de autovalor e autovetor de um operador linear, noções essas centrais na teoria das equações diferenciais ordinárias, sobre as quais tecemos alguns comentários. O capítulo encerra-se com o *Teorema Espectral* para operadores simétricos, no qual se prova que toda matriz simétrica é diagonalizável. Como aplicação desse teorema, mostramos um método para estudar cônicas em posição geral no plano.

Uma parte importante de nosso livro são seus mais de 270 exercícios, divididos em duas categorias: problemas resolvidos e problemas propostos. Os enunciados dos problemas resolvidos, marcados com asterisco, estão espalhados pelas seções

Prefácio

do livro. Suas soluções encontram-se no Capítulo 10, onde também estão as respostas dos exercícios de caráter computacional.

Ao longo do livro, quando cabe, inserimos também alguns comentários de caráter histórico, pois acreditamos que os professores do ensino básico precisam ter conhecimentos da história da Matemática para poder motivar os seus alunos. De fato, segundo a M.A.A. (Mathematical Association of America), o conhecimento da história da Matemática mostra aos alunos que ela é uma importante conquista humana, geralmente desenvolvida de forma intuitiva e experimental a partir da necessidade de se resolver problemas nas mais diversas áreas do saber.

Terminamos encorajando os leitores a nos enviarem críticas, sugestões e/ou eventuais correções. Todas elas serão muito bem-vindas.

Fevereiro de 2012.

Os autores.

Prefácio da 3ª edição

Agradecemos imensamente pela acolhida a este trabalho. Estamos felizes por estar lançando a terceira edição do nosso livro, agora em um novo formato. Nesta edição, fizemos algumas correções no texto e acrescentamos alguns exercícios sobre determinantes. Comentários sobre o livro são bem-vindos e podem ser encaminhados para ahefez@id.uff.br ou ceciliafernandez@id.uff.br.

Fevereiro de 2022.

Os autores.