

Em memória do
professor e matemático
Sebastião Marcos Antunes Firmo
(★ 1948 – † 2020)

Sumário

I	Geometria analítica vetorial	1
1	Espaço vetorial e Espaço euclidiano	3
1.1	O espaço vetorial \mathbb{R}^n	3
1.2	Geometria euclidiana: notações	6
1.3	Geometria e Álgebra vetorial	11
1.4	Combinação linear	20
1.5	Bases do \mathbb{R}^n	23
1.6	Matrizes: uma introdução	26
1.7	Determinantes: uma introdução	31
1.8	Matrizes e sistemas lineares	34
1.9	Exercícios de revisão	42
2	Determinantes	47
2.1	Determinante: existência e unicidade	47
2.2	Determinante da matriz transposta	55
2.3	Determinante do produto de matrizes	56
2.3	Matrizes invertíveis	58
2.4	Regra de Cramer	63
2.5	Sobre determinante igual a zero	67
2.6	Exercícios de revisão	72
3	Escalonamento	75
3.1	Matrizes e combinação linear	76
3.2	Escalonamento	83

3.3	Invertendo matrizes	86
3.4	Sistemas lineares equivalentes	91
4	Álgebra vetorial e Geometria	95
4.1	Produto interno	95
4.2	Norma	97
4.3	Medida de ângulo	102
4.4	Ortogonalidade	105
4.5	Equações cartesianas de retas e planos	111
4.6	Áreas em \mathbb{E}^2	120
4.7	Volumes em \mathbb{E}^3	125
4.8	Equações paramétricas de retas	128
4.9	Exercícios de revisão	132
II	Álgebra linear	143
5	Subespaço vetorial	145
5.1	Subespaços e sistemas lineares	145
5.2	Subespaços e combinações lineares	149
5.3	Geradores de subespaço	154
5.4	Base e dimensão	164
5.5	Bases ortonormais	169
5.6	Exercícios de revisão	172
6	Transformações lineares	175
6.1	Transformações lineares	175
6.2	Núcleo, imagem e sistema linear	179
6.3	Matriz de uma transformação linear	183
6.4	Teorema do núcleo e da imagem	188
6.5	Operações	191
6.6	Exercícios de revisão	194

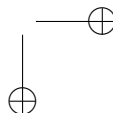
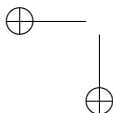
7	Operadores lineares	197
7.1	Operadores invertíveis	197
7.2	Construindo transformações lineares	202
7.3	Autovalor e Autovetor	206
7.4	Operador transposto	215
7.5	Operadores simétricos	217
7.6	Exercícios de revisão	221
8	Operadores ortogonais	223
8.1	Operadores ortogonais	223
8.2	Propriedades de operadores ortogonais	225
8.3	Classificação das isometrias	230
9	Representação matricial	233
9.1	Representação matricial de vetores	233
9.2	Representação de transformações	235
9.3	Algoritmos	239
9.4	Mudança de coordenadas	242
9.5	Representação de operadores	245
9.6	Diagonalização de operadores	249
10	Formas bilineares	259
10.1	Funcionais lineares	259
10.2	Formas bilineares	261
10.3	Formas bilineares simétricas	265
10.4	Forma quadrática	267
10.5	Diagonalização de formas quadráticas	270
11	Cônicas e Quádricas	273
11.1	Cônicas I	273
11.2	Cônicas II	281
11.3	Quádricas I	286
11.4	Quádricas II	290

Referências

293

Índice remissivo

295



Prefácio

Este texto procura atender aos cursos ofertados pelas universidades brasileiras que possuem na sua integralização as disciplinas semestrais Geometria analítica e/ou Introdução à Álgebra linear.

A apresentação registra a experiência do autor em sala de aula e a redação levou em conta o estudante. Por isto, em alguns momentos, um leitor familiarizado com Álgebra linear pode considerar o texto lento e simples. Não é o caso do leitor iniciante. A elegância dos tópicos de Álgebra linear esconde conceitos aparentemente díspares, tornando seu estudo uma descoberta constante para aqueles que não tiveram a oportunidade de conhecê-la sistematicamente.

A dificuldade de uma apresentação de Álgebra linear é o uso dos seus conceitos por diversas disciplinas, tais como, Cálculo, Cálculo Vetorial, Mecânica, Eletricidade, Equações Diferenciais, Estatística, etc. Em geral, numa integralização curricular tais disciplinas são ministradas posteriores à Álgebra Linear, como é conveniente. Portanto, a beleza de seu uso fica prejudicada, pois as aplicações ainda não estão ao alcance da compreensão do estudante.

Para contornar essa dificuldade, optamos por colocar a Álgebra Linear como uma disciplina de transição entre a Matemática do Ensino Médio e a Matemática do Ensino Superior. O texto procura relacionar os novos conceitos com aqueles da Geometria analítica, conteúdo familiar ao estudante calouro. Para evitar repetições, a Geometria analítica terá um tratamento vetorial.

Agradeço à Professora Maria Silvana Alcântara Costa da Universidade Federal do Cariri pelo incentivo, correções e sugestões e aos meus alunos.

Plácido Andrade
Juazeiro do Norte, 12 de janeiro de 2022

Parte I

Geometria analítica vetorial

1

Espaço vetorial e Espaço euclidiano

O objetivo deste capítulo é ressaltar como a Álgebra linear relaciona e unifica vários tópicos estudados dispersamente no Ensino Médio. Partimos do conceito de combinação linear para mostrar como ele nos leva, naturalmente, ao estudo de sistemas de equações lineares, matrizes e determinantes. Nos capítulos seguintes, estes tópicos são abordados com maior profundidade.

Para relevar o aspecto unificador de Álgebra linear e realizar uma transição entre conteúdos do Ensino Médio e Ensino Superior, utilizaremos o fato de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 serem os modelos algébricos do plano euclidiano e do espaço euclidiano, \mathbb{E}^2 e \mathbb{E}^3 , respectivamente. Isto permite explicitar as ideias geométricas subjacentes ao conceito de vetor. Não desenvolvemos a Geometria euclidiana, ela é utilizada apenas como apoio para a apreensão de alguns conceitos.

Neste texto, os termos *função* e *aplicação* possuem o mesmo significado.

1.1 O espaço vetorial \mathbb{R}^n

Denota-se por \mathbb{R}^n o conjunto constituído pelas n -uplas ordenadas de números reais, qual seja,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R} \text{ para todo inteiro } i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Seus elementos são chamados *vetores*. Por simplicidade, muitas vezes indicaremos por v um vetor de \mathbb{R}^n em lugar de $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. O número x_i é chamado *i -ésima coordenada do vetor*.

Se $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ são dois vetores de \mathbb{R}^n , estabelecemos que $v = w$ quando $x_i = y_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Em grande parte do texto abordaremos os conjuntos \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , por isso, reservaremos uma notação especial para indicar seus elementos. Para o primeiro conjunto, muitas vezes, indicaremos um par ordenado por $v = (x, y)$ e uma tripla ordenada em \mathbb{R}^3 será registrada na forma $v = (x, y, z)$.

O conjunto constituído pelas 1-uplas ordenadas, $\mathbb{R}^1 = \{(x); x \in \mathbb{R}\}$, é “canonicamente” identificado com o conjunto dos números reais \mathbb{R} . Não distinguiremos uma 1-upla ordenada $(x) \in \mathbb{R}^1$ de um número real $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 1.1. Assinale as afirmações falsas, (F), e verdadeiras, (V).

$$() \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2. \quad () w = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^2. \quad () \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3. \quad \diamond$$

Define-se duas operações binárias envolvendo elementos de \mathbb{R}^n :

- i) *soma de dois vetores*;
- ii) *multiplicação de um vetor por um escalar*.

O termo *escalar* significa número real. As operações são definidas pelas seguintes regras, respectivamente. Se $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ são vetores de \mathbb{R}^n e $\lambda \in \mathbb{R}$, estabelecemos, respectivamente, que¹

$$\begin{cases} v + w &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda v &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{cases} .$$

¹ λ : letra grega minúscula lambda.

Exemplo 1.1. Sejam $v = (2, -1, 0)$ e $w = (-4, 7, 3)$ vetores de \mathbb{R}^3 . Pela definição, a soma dos vetores é efetuada “coordenada a coordenada”,

$$v + w = (2, -1, 0) + (-4, 7, 3) = (-2, 6, 3).$$

Se $\lambda = -3$ então $\lambda v = -3 \cdot (2, -1, 0) = (-6, 3, 0)$. \diamond

Postas estas definições, surgem vetores e terminologias especiais.

1. *Vetor nulo* O vetor $o = (0, 0, \dots, 0)$ do \mathbb{R}^n é denominado vetor nulo. Verifica-se que, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, valem as igualdades $v + o = v = o + v$.
2. Para cada vetor v do \mathbb{R}^n existe um vetor w em \mathbb{R}^n , denominado *inverso aditivo* de v , tal que $w + v = o = v + w$. Para obter o inverso aditivo, é suficiente multiplicar v pelo escalar $\lambda = -1$.
3. Dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ são *colineares* quando existe um escalar λ tal que $v = \lambda w$ ou $w = \lambda v$.

Diz-se que estas operações equipam \mathbb{R}^n com uma estrutura de espaço vetorial, pois \mathbb{R}^n é um dos inúmeros exemplos de uma estrutura algébrica importante na Matemática e que, por isso, merece ser fixada numa definição.

Definição 1.1. Um espaço vetorial real consiste de um conjunto V , cujos elementos são chamados de vetores, no qual estão definidas duas operações binárias, “+” e “·”, gozando das propriedades listadas abaixo.

I Se $u, v \in V$, então $u + v \in V$ e:

- a) a adição é comutativa, $u + v = v + u$;
- b) a adição é associativa, $(u + v) + w = u + (v + w)$;
- c) existe um único vetor o , chamado vetor nulo, tal que $v + o = v = o + v$, para todo $v \in V$;
- d) para cada vetor $v \in V$ existe um único vetor $w \in V$, chamado de inverso aditivo de v , tal que $v + w = o = w + v$.