Em memória do

professor e matemático

Sebastião Marcos Antunes Firmo

($\star$ 1948 – † 2020)

Sumário

Prefácio

Este texto procura atender aos cursos ofertados pelas universidades brasileiras que possuem na sua integralização as disciplinas semestrais Geometria analítica e/ou Introdução à Álgebra linear.

A apresentação registra a experiência do autor em sala de aula e a redação levou em conta o estudante. Por isto, em alguns momentos, um leitor familiarizado com Álgebra linear pode considerar o texto lento e simples. Não é o caso do leitor iniciante. A elegância dos tópicos de Álgebra linear esconde conceitos aparentemente díspares, tornando seu estudo uma descoberta constante para aqueles que não tiveram a oportunidade de conhecê-la sistematicamente.

A dificuldade de uma apresentação de Álgebra linear é o uso dos seus conceitos por diversas disciplinas, tais como, Cálculo, Cálculo Vetorial, Mecânica, Eletricidade, Equações Diferenciais, Estatística, etc. Em geral, numa integralização curricular tais disciplinas são ministradas posteriores à Álgebra Linear, como é conveniente. Portanto, a beleza de seu uso fica prejudicada, pois as aplicações ainda não estão ao alcance da compreensão do estudante.

Para contornar essa dificuldade, optamos por colocar a Álgebra Llinear como uma disciplina de transição entre a Matemática do Ensino Médio e a Matemática do Ensino Superior. O texto procura relacionar os novos conceitos com aqueles da Geometria analítica, conteúdo familiar ao estudante calouro. Para evitar repetições, a Geometria analítica terá um tratamento vetorial.

Agradeço à Professora Maria Silvana Alcântara Costa da Universidade Federal do Cariri pelo incentivo, correções e sugestões e aos meus alunos.

Plácido Andrade
Juazeiro do Norte, 12 de janeiro de 2022

Parte I

Geometria analítica vetorial

1

Espaço vetorial e Espaço euclidiano

O objetivo deste capítulo é ressaltar como a Álgebra linear relaciona e unifica vários tópicos estudados dispersamente no Ensino Médio. Partimos do conceito de combinação linear para mostrar como ele nos leva, naturalmente, ao estudo de sistemas de equações lineares, matrizes e determinantes. Nos capítulos seguintes, estes tópicos são abordados com maior profundidade.

Para relevar o aspecto unificador de Álgebra linear e realizar uma transição entre conteúdos do Ensino Médio e Ensino Superior, utilizaremos o fato de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ serem os modelos algébricos do plano euclidiano e do espaço euclidiano, $\mathbb{E}^2$ e $\mathbb{E}^3$, respectivamente. Isto permite explicitar as ideias geométricas subjacentes ao conceito de vetor. Não desenvolvemos a Geometria euclidiana, ela é utilizada apenas como apoio para a apreensão de alguns conceitos.

Neste texto, os termos *função* e *aplicação* possuem o mesmo significado.

1.1 O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

Denota-se por $\mathbb{R}^n$ o conjunto constituído pelas n-uplas ordenadas de números reais, qual seja,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ x_i \in \mathbb{R} \text{ para todo inteiro } i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Seus elementos são chamados *vetores*. Por simplicidade, muitas vezes indicaremos por v um vetor de $\mathbb{R}^n$ em lugar de $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. O número x_i é chamado *$i-$ésima coordenada do vetor*.

Se $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ são dois vetores de $\mathbb{R}^n$, estabelecemos que $v = w$ quando $x_i = y_i$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Em grande parte do texto abordaremos os conjunto $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, por isso, reservaremos uma notação especial para indicar seus elementos. Para o primeiro conjunto, muitas vezes, indicaremos um par ordenado por $v = (x, y)$ e uma tripla ordenada em $\mathbb{R}^3$ será registrada na forma $v = (x, y, z)$.

O conjunto constituído pelas $1-$uplas ordenadas, $\mathbb{R}^1 = \{(x); x \in \mathbb{R}\}$, é "canonicamente" identificado com o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Não distinguiremos uma $1-$upla ordenada $(x) \in \mathbb{R}^1$ de um número real $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 1.1. Assinale as afirmações falsas, (F), e verdadeiras, (V).

( ) $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. ( ) $w = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^2$. ( ) $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$. $\diamond$

Define-se duas operações binárias envolvendo elementos de $\mathbb{R}^n$:

i) *soma de dois vetores*;

ii) *multiplicação de um vetor por um escalar.*

O termo *escalar* significa número real. As operações são definidas pelas seguintes regra, respectivamente. Se $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ são vetores de $\mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, estabelecemos, respectivamente, que[1]

$$\begin{cases} v + w &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda v &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \end{cases}.$$

[1] λ: letra grega minúscula lambda.

Exemplo 1.1. Sejam $v = (2, -1, 0)$ e $w = (-4, 7, 3)$ vetores de $\mathbb{R}^3$. Pela definição, a soma dos vetores é efetuada "coordenada a coordenada",

$$v + w = (2, -1, 0) + (-4, 7, 3) = (-2, 6, 3).$$

Se $\lambda = -3$ então $\lambda v = -3 \cdot (2, -1, 0) = (-6, 3, 0)$. $\diamond$

Postas estas definições, surgem vetores e terminologias especiais.

1. *Vetor nulo* O vetor $o = (0, 0, \ldots, 0)$ do $\mathbb{R}^n$ é denominado vetor nulo. Verifica-se que, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, valem as igualdades $v + o = v = o + v$.

2. Para cada vetor v do $\mathbb{R}^n$ existe um vetor w em $\mathbb{R}^n$, denominado *inverso aditivo* de v, tal que $w + v = o = v + w$. Para obter o inverso aditivo, é suficiente multiplicar v pelo escalar $\lambda = -1$.

3. Dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ são *colineares* quando existe um escalar λ tal que $v = \lambda w$ ou $w = \lambda v$.

Diz-se que estas operações equipam $\mathbb{R}^n$ com uma estrutura de espaço vetorial, pois $\mathbb{R}^n$ é um dos inúmeros exemplos de uma estrutura algébrica importante na Matemática e que, por isso, merece ser fixada numa definição.

Definição 1.1. *Um espaço vetorial real consiste de um conjunto V, cujos elementos são chamados de vetores, no qual estão definidas duas operações binárias, "+" e "$\cdot$", gozando das propriedades listadas abaixo.*

I Se $u, v \in V$, então $u + v \in V$ e:

- *a) a adição é comutativa, $u + v = v + u$;*
- *b) a adição é associativa, $(u + v) + w = u + (v + w)$;*
- *c) existe um único vetor o, chamado vetor nulo, tal que $v + o = v = o + v$, para todo $v \in V$;*
- *d) para cada vetor $v \in V$ existe um único vetor $w \in V$, chamado de inverso aditivo de v, tal que $v + w = o = w + v$.*