NÚMEROS E FUNÇÕES REAIS

Números e funções reais

Copyright ©2023 Elon Lages Lima
Direitos reservados pela Sociedade Brasileira de Matemática.
A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98).

Sociedade Brasileira de Matemática
Presidente: Paolo Piccione
Vice-Presidente: Jaqueline Godoy Mesquita
Diretores: Walcy Santos
Jorge Herbert Soares de Lira
Daniel Gonçalves
Roberto Imbuzeiro

Editor Executivo
Ronaldo Alves Garcia

Assessor Editorial
Tiago Costa Rocha

Coleção PROFMAT

Comitê Editorial da Coleção PROFMAT
Hilário Alencar (Editor-Chefe)
Marcela Souza (Editora-Adjunta)
Mariana Cassol
Paulo Leandro Dattori
Vanderlei Horita

Projeto gráfico e capa
Pablo Diego Regino

Editoração Eletrônica
Douglas Hilário da Cruz
Yunelsy Nápoles Alvarez

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefone: (21) 2529-5073
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

ISBN 978-85-8337-194-6

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Lima, Elon Lages
Números e funções reais / Elon Lages Lima. – 2. ed. – Rio de Janeiro, RJ : SBM, 2023.

ISBN 978-85-8337-194-6

1. Matemática - Estudo e ensino I. Título.

23-144398 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Estudo e ensino 510.7
Aline Graziele Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

Elon Lages Lima

NÚMEROS E FUNÇÕES REAIS

2ª edição
2023
Rio de Janeiro

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Sumário

Prefácio **ix**

1 Conjunto **1**
1.1 A Noção de Conjunto 2
1.2 A Relação de Inclusão 3
1.3 O Complementar de um Conjunto 7
1.4 Reunião e Interseção 10
1.5 Comentário Sobre a Noção de Igualdade 13
1.6 Recomendações Gerais 14
Exercícios 15

2 Números Naturais **19**
2.1 Introdução 20
2.2 Comentário: Definições, Axiomas, etc. 20
2.3 O Conjunto dos Números Naturais 23
2.4 Destaque para o Axioma da Indução 25
2.5 Adição, Multiplicação e Ordem 26
2.6 Algumas demonstrações 29
Exercícios 33

3 Números Cardinais **35**
3.1 Funções 36
3.2 A Noção de Número Cardinal 39
3.3 Conjuntos Finitos 42
3.4 Sobre Conjuntos Infinitos 44
Exercícios 46

4 Números Reais **49**
4.1 Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis 50
4.2 A Reta Real 52
4.3 Expressões Decimais 55
4.4 Desigualdades 62
4.5 Intervalos 66
4.6 Valor Absoluto 67
4.7 Sequências e Progressões 68
4.8 Sequências Monótonas 70
Exercícios 73

5 Funções Afins **75**
5.1 O Plano Numérico $\mathbb{R}^2$ 80
5.2 A Função Afim 84
5.3 A Função Linear 89
5.4 Caracterização da Função Afim 95
5.5 Funções Poligonais 98
Exercícios 100

6 Funções Quadráticas **109**
6.1 Definição e Preliminares 110
6.2 Um Problema Muito Antigo 114
6.3 A Forma Canônica do Trinômio 116
6.4 O Gráfico da Função Quadrática 119
6.5 Uma Propriedade Notável da Parábola 129
6.6 O Movimento Uniformemente Variado 135
Exercícios 138

7 Funções Polinomiais **147**
7.1 Funções Polinomiais vs Polinômios 148
7.2 Determinando um Polinômio a Partir de Seus Valores 150
7.3 Gráficos de Polinômios 152
Exercícios 156

8 Funções Exponenciais e Logarítmicas **159**
8.1 Introdução 160
8.2 Potências de Expoente Racional 162
8.3 A Função Exponencial 166
8.4 Caracterização da Função Exponencial 171
8.5 Funções Exponenciais e Progressões 174
8.6 Função Inversa 175
8.7 Funções Logarítmicas 178
8.8 Caracterização das Funções Logarítmicas 181
8.9 Logaritmos Naturais 182
8.10 A Função Exponencial de Base e 190
8.11 Alguns Exemplos Clássicos 195
Exercícios 198

9 Funções Trigonométricas **201**
9.1 Introdução 202
9.2 A Função de Euler e a Medida de Ângulos 205
9.3 As Funções Trigonométricas 211
9.4 As Fórmulas de Adição 216
9.5 A Lei dos Cossenos e a Lei dos Senos 221
Exercícios 226

10 Soluções dos Exercícios **229**
10.1 Capítulo 1 - Conjunto 230
10.2 Capítulo 2 - Números Naturais 233
10.3 Capítulo 3 - Números Cardinais 235
10.4 Capítulo 4 - Números Reais 237
10.5 Capítulo 5 - Funções Afins 241
10.6 Capítulo 6 - Funções Quadráticas 248
10.7 Capítulo 7 - Funções Polinomiais 260
10.8 Capítulo 8 - Funções Exponenciais e Logarítmicas 262
10.9 Capítulo 9 - Funções Trigonométricas 264

Bibliografia **267**

Índice Remissivo **269**

Prefácio

O programa de Matemática da primeira série do Ensino Médio tem como tema central as funções reais de uma variável real, estudadas sob o ponto de vista elementar, isto é, sem o uso do Calculo Infinitesimal. Como preliminar a esse estudo e preparação para as séries subsequentes, são apresentadas noções sobre conjuntos, a ideia geral de função e as diferentes categorias de números (naturais, inteiros, racionais e, principalmente, reais).

O presente livro cobre esse programa. Ele contem a matéria lecionada no primeiro dos três módulos do curso de aperfeiçoamento para professores de Matemática, iniciado no segundo semestre de 1996, no IMPA, tendo como instrutores os professores A.C.O. Morgado, E. Wagner, Paulo Cézar Carvalho e o autor. A estes caros amigos e competentes colaboradores devo uma revisão crítica do manuscrito, a sugestão de alguns exemplos interessantes e a inclusão de numerosos exercícios. Por essa valiosa participação, registro meus agradecimentos.

O professor de Matemática, principalmente aquele que atua no Ensino Médio, no escasso tempo que lhe resta da faina diária, para preparar suas aulas conta praticamente com uma única fonte de referência: o livro-texto que adota (ou os outros, que dele pouco diferem).

Esses textos, em sua maioria, são escritos por colegas que tiveram formação e experiência como as suas, prolongando assim um círculo vicioso, no qual decresce a qualidade e repetem-se os defeitos.

Visando contribuir para reverter esse processo, a Sociedade Brasileira de Matemática, com a colaboração do IMPA e o apoio decisivo do MEC, criou o Profmat, um programa de pós-graduação de caráter nacional destinado ao aperfeiçoamento dos professores que ensinam Matemática em nossas escolas. E, para servir de suporte e guia de estudos das aulas do Profmat, a SBM deu início à coleção de livros-texto, dos quais este é um elemento.

Neste livro, procuramos deixar claro que a Matemática oferece uma variedade de conceitos abstratos que servem de modelos para situação concretas, permitindo assim analisar, prever e tirar conclusões de forma eficaz em circunstâncias onde uma abordagem empírica muitas vezes não conduz a nada. Os temas aqui abordados são apresentados dentro dessa ótica.

Assim é que os conjuntos são o modelo matemático para a organização do pensamento lógico; os números são o modelo para as operações de contagem e medida; as funções afins, as quadráticas, as exponenciais, as logarítmicas e as trigonométricas, cada uma delas é estudada como o modelo matemático adequado para representar uma situação específica.

A fim de saber qual o tipo de função que deve ser empregado para resolver um determinado problema, é necessário comparar as características desse problema

com as propriedades típicas da função que se tem em mente. Este processo requer que se conheçam os teoremas de caracterização para cada tipo de função. Sem tal conhecimento é impossível aplicar satisfatoriamente os conceitos e métodos matemáticos para resolver os problemas concretos que ocorrem, tanto no dia a dia como nas aplicações da Matemática às outras ciências e à tecnologia.

Vários desses teoremas de caracterização são expostos aqui, de forma elementar. Acho que todos os professores devem conhecê-los e ensinar seus alunos a usá-los de forma consciente. Quanto às demonstrações desses teoremas, embora acessíveis, elas foram incluídas aqui para o entendimento dos professores. Não considero essencial repassá-las aos estudantes, salvo em casos especiais, a critério de cada professor.

O importante é ter em mente que as aplicações aqui sugeridas despertam o interesse, justificam o esforço, exibem a eficiência e a utilidade dos métodos da Matemática mas, por outro lado, só podem ser levadas a bom termo se contarem com uma base conceitual adequada.

Rio de Janeiro, maio de 2012.

Elon Lages Lima

Conjunto

1

1.1 A Noção de Conjunto

Toda a Matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos. Portanto, a noção de conjunto é a mais fundamental: a partir dela, todos os conceitos matemáticos podem ser expressos. Ela é também a mais simples das ideias matemáticas.

Um conjunto é formado por elementos. Dados um conjunto A e um objeto qualquer a (que pode até mesmo ser outro conjunto), a pergunta cabível em relação a eles é: a é ou não um elemento do conjunto A? No caso afirmativo, diz-se que *a pertence* ao conjunto A e escreve-se $a \in A$. Caso contrário, põe-se $a \notin A$ e diz-se que *a não pertence* ao conjunto A.

A Matemática se ocupa primordialmente de números e do espaço. Portanto, os conjuntos mais frequentemente encontrados na Matemática são os conjuntos numéricos, as figuras geométricas (que são conjuntos de pontos) e os conjuntos que se derivam destes, como os conjuntos de funções, de matrizes etc.

A linguagem dos conjuntos, hoje universalmente adotada na apresentação da Matemática, ganhou esta posição porque permite dar aos conceitos e às proposições desta ciência a precisão e a generalidade que constituem sua característica básica.

Os conjuntos substituem as "propriedades" e as "condições". Assim, em vez de dizermos que "o objeto x goza da propriedade P" ou o "objeto y satisfaz a condição C", podemos escrever $x \in A$ e $y \in B$, onde A é o conjunto dos objetos que gozam da propriedade P e B é o conjunto dos objetos que satisfazem a condição C.

Por exemplo, sejam P a propriedade de um número inteiro x ser par (isto é, divisível por 2) e C a condição sobre o número real y expressa por

$$y^2 - 3y + 2 = 0.$$

Por outro lado sejam

$$A = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\} \quad e \quad B = \{1, 2\}.$$

Então, tanto faz dizer que x goza da propriedade P e y satisfaz a condição C como afirmar que $x \in A$ e $y \in B$.

Qual é, porém, a vantagem que se obtém quando se prefere dizer que $x \in A$ e $y \in B$ em vez de dizer que x goza da propriedade P e y satisfaz a condição C?

A vantagem de se utilizar a linguagem e a notação de conjuntos é que entre estes existe uma álgebra, montada sobre as operações de reunião ($A \cup B$) e interseção ($A \cap B$), além da relação de inclusão ($A \subset B$). As propriedades e regras operatórias dessa álgebra, como por exemplo

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad e \quad A \subset A \cup B,$$

são extremamente fáceis de manipular e representam um enorme ganho em simplicidade e exatidão quando comparadas ao manuseio de propriedades e condições.

Nos primórdios da Teoria dos Conjuntos, costumava-se escrever $A + B$ em vez de $A \cup B$ e $A.B$ em vez de $A \cap B$. Esta prática foi abolida, principalmente porque, se A e B são conjuntos de números, $A + B$ é o conjunto das somas $x + y$ onde $x \in A, y \in B$ e analogamente $A \cdot B = \{x \cdot y; x \in A \text{ e } y \in B\}$.

Não é correto escrever, por exemplo, $A = \{\text{conjunto dos números pares}\}$. O símbolo $\{...\}$ significa o conjunto cujos elementos estão descritos no interior das chaves. Escreve-se A = conjunto dos números pares, $A = \{$ números pares $\}$ ou $A = \{2n; n \in \mathbb{Z}\}$.

Existe um conjunto excepcional e intrigante: o conjunto vazio, designado pelo símbolo $\varnothing$. Ele é aceito como conjunto porque cumpre a utilíssima função de simplificar as proposições, evitando uma longa e tediosa menção de exceções. Qualquer propriedade contraditória serve para definir o conjunto vazio. Por exemplo, tem-se $\varnothing = \{x; x \neq x\}$, ou seja, $\varnothing$ é o conjunto dos objetos x tais que x é diferente de si mesmo. Em muitas questões matemáticas é importante saber que um determinado conjunto X não é vazio. Para mostrar que X não é vazio, deve-se simplesmente encontrar um objeto x tal que $x \in X$.

Outros conjuntos curiosos são os conjuntos unitários. Dado um objeto x qualquer, o conjunto unitário $\{x\}$ tem como único elemento esse objeto x. Estritamente falando, x e $\{x\}$ não são a mesma coisa. Por exemplo, $\varnothing \neq \{\varnothing\}$ pois $\{\varnothing\}$ possui um elemento (tem-se $\varnothing \in \{\varnothing\}$) mas $\varnothing$ é vazio. Em certas ocasiões, entretanto, pode tornar-se um pedantismo fazer essa distinção. Nesses casos, admite-se escrever x em vez de $\{x\}$. Um exemplo disso ocorre quando se diz que a interseção de duas retas r e s é o ponto P (em lugar do conjunto cujo único elemento é P) e escreve-se $r \cap s = P$, em vez de $r \cap s = \{P\}$.

1.2 A Relação de Inclusão

Sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A for também elemento de B, diz-se que A é um *subconjunto* de B, que A está *contido* em B ou que A é *parte* de B. Para indicar este fato, usa-se a notação $A \subset B$.

Por exemplo: sejam T o conjunto dos triângulos e P o conjunto dos polígonos do plano. Todo triângulo é um polígono, logo $T \subset P$.

A relação de $A \subset B$ chama-se *relação de inclusão*. Quando A não é um subconjunto de B, escreve-se $A \not\subset B$. Isto significa que nem todo elemento de A pertence a B, ou seja, que existe pelo menos um objeto a tal que $a \in A$ e $a \notin B$. Por exemplo,

sejam A o conjunto dos números pares e B o conjunto dos múltiplos de 3. Tem-se $A \not\subset B$ porque $2 \in A$ mas $2 \notin B$. Tem-se também $B \not\subset A$ pois $3 \in B$ mas $3 \notin A$.

Há duas inclusões extremas. A primeira é obvia: para todo conjunto A, vale $A \subset A$ (pois é claro que todo elemento de A pertence a A). A outra é, no mínimo, curiosa: tem-se $\varnothing \subset A$, seja qual for o conjunto A. Com efeito, se quiséssemos mostrar que $\varnothing \not\subset A$, teríamos que obter um objeto x tal que $x \in \varnothing$ mas $x \notin A$. Como $x \in \varnothing$ é impossível, somos levados a concluir que $\varnothing \subset A$, ou seja, que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro.

Diz-se que A é um *subconjunto próprio* de B quando se tem $A \subset B$ com $A \neq \varnothing$ e $A \neq B$.

A relação de inclusão goza de três propriedades fundamentais.

PROPRIEDADES

Dados quaisquer conjunto A, B e C tem-se:

reflexividade: $A \subset A$;

antissimetria: se $A \subset B$ e $B \subset A$ então $A = B$;

transitividade: se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.

A propriedade antissimétrica é constantemente usada nos raciocínios matemáticos. Quando se deseja mostrar que os conjuntos A e B são iguais, prova-se que $A \subset B$ e $B \subset A$, ou seja, que todo elemento de A pertence a B e todo elemento de B pertence a A. Na realidade, a propriedade antissimétrica da relação de inclusão contém, nela embutida, a condição de igualdade entre os conjuntos: os conjuntos A e B são iguais se, e somente se, têm os mesmos elementos.

Por sua vez, a propriedade transitiva da inclusão é a base do raciocínio dedutivo, sob a forma que classicamente se chama de

silogismo. Um exemplo de silogismo (tipicamente aristotélico) é o seguinte: todo ser humano é um animal, todo animal é mortal, logo todo ser humano é mortal. Na linguagem de conjuntos, isso seria formulado assim: sejam H, A e M respectivamente os conjuntos dos seres humanos, dos animais e dos mortais. Temos $H \subset A$ e $A \subset M$, logo $H \subset M$.

A relação de inclusão entre conjuntos está estreitamente relacionada com a implicação lógica. Vejamos como. Sejam P e Q propriedades referentes a um elemento genérico de um conjunto U. Essas propriedades definem os conjuntos A, formado pelos elementos de U que gozam de P, e B, conjunto formado pelos elementos de U que têm a propriedade Q. Diz-se então que a propriedade P *implica* (ou *acarreta*) a propriedade Q, e escreve-se $P \Rightarrow Q$, para significar que $A \subset B$

Por exemplo, seja U o conjunto dos quadriláteros convexos do plano. Designemos com P a propriedade de um quadrilátero ter seus quatro ângulos retos e por Q a propriedade de um quadrilátero ter seus lados opostos paralelos. Então podemos escrever $P \Rightarrow Q$. Com efeito, neste caso, A é o conjunto dos retângulos e B é o conjunto dos paralelogramos, logo $A \subset B$.

Vejamos outro exemplo. Podemos escrever a implicação

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Ela significa que toda raiz da equação $x^2 + x - 1 = 0$ é também raiz de

$$x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Há diferentes maneiras de se ler a relação $P \Rightarrow Q$. Pode-se dizer "P implica Q", "se P então Q", "P é condição suficiente para Q", "Q é condição necessária para P" ou "P somente se Q".

Assim, no primeiro exemplo acima, podemos dizer: "ser retângulo implica ser paralelogramo", "se x é um retângulo então x é um paralelogramo", "ser retângulo é condição suficiente para ser paralelogramo", "ser paralelogramo é condição necessária para ser retângulo", ou, finalmente, "todo retângulo é um paralelogramo".

A implicação $Q \Rightarrow P$ chama-se a *recíproca* de $P \Rightarrow Q$. Evidentemente, a recíproca de uma implicação verdadeira pode ser falsa. Nos dois exemplos dados acima, as recíprocas são falsas: nem todo paralelogramo é retângulo e $x = 1$ é raiz da equação.

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

mas não da equação

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Quando são verdadeiras ambas as implicações $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$, escreve-se $Q \Leftrightarrow P$ e lê-se "P se, e somente se, Q", "P é equivalente a Q" ou "P é necessária e suficiente para Q". Isto significa que o conjunto dos elementos que gozam da propriedade P coincide com o conjunto dos elementos que gozam de Q.

Por exemplo, sejam P a propriedade de um triângulo, cujos lados medem $x \leqslant y \leqslant z$, ser retângulo e Q a propriedade de valer

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Então $P \Leftrightarrow Q$.

A resolução de uma equação é um caso típico em que se tem uma sequência de implicações lógicas. Vejamos. Para resolver a equação

$$x^2 - x - 2 = 0$$

podemos seguir os passos abaixo:

(P) ... ... $x^2 - x - 2 = 0$;

(Q) ... ... $(x - 2)(x + 1) = 0$;

(R) ... ... $x = 2$ ou $x = -1$;

(S) ... ... $x \in \{2, -1\}$.

Se chamarmos respectivamente de P, Q, R e S as condições impostas sobre o número x em cada uma das linhas acima, os passos que acabamos de seguir significam que

$$P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow S,$$

isto é, se o número x satisfaz P então satisfaz Q e assim por diante. Por transitividade, a conclusão a tirar é $P \Rightarrow S$, ou seja:

$$\text{Se } x^2 - x - 2 = 0 \text{ então } x \in \{2, -1\}$$

Estritamente falando, esta afirmação não significa que as raízes da equação $x^2 - x - 2 = 0$ são 2 e -1. O que está dito acima é que se houver raízes desta equação elas devem pertencer ao conjunto $\{2, -1\}$. Acontece, entretanto, que no presente caso, os passos acima podem ser revertidos. É fácil ver que valem as implicações recíprocas $S \Rightarrow R \Rightarrow Q \Rightarrow P$, logo $S \Rightarrow P$. Portanto $P \Leftrightarrow S$, ou seja, 2 e -1 são de fato as (únicas) raízes da equação

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

É importante, quando se resolve uma equação, ter em mente que cada passo do processo adotado representa uma implicação lógica. Às vezes essa implicação não pode ser revertida (isto é, sua recíproca não é verdadeira). Nesses casos, o conjunto obtido no final apenas contém (mas não é igual a) o conjunto das raízes, este último podendo até mesmo ser vazio. Ilustremos esta possibilidade com um exemplo.

Seja a equação $x^2+1 = 0$. Sabemos que ela não possui soluções reais. Na sequência abaixo, cada uma das letras P, Q, R e S representa a condição sobre o número x expressa na igualdade ao lado. Assim, P significa $x^2 + 1 = 0$, etc.

(P) $x^2 + 1 = 0$; (multiplicando por $x^2 - 1$)

(Q) $x^4 - 1 = 0$;

(R) $x^4 = 1$;

(S) $x \in \{-1, 1\}$.

Evidentemente, tem-se $P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow S$, logo $P \Rightarrow S$, ou seja, toda raiz real da equação $x^2 + 1 = 0$ pertence ao conjunto $\{-1, 1\}$. O raciocínio é absolutamente correto, mas apenas ilustra o fato de que o conjunto vazio está contido em qualquer outro. A conclusão que se pode tirar é que se houver raízes reais da equação $x^2+1 = 0$ elas pertencerão ao conjunto $\{-1, 1\}$. Nada mais. O fato é que a implicação $P \Rightarrow Q$ não pode ser revertida: sua recíproca é falsa. Este fenômeno ocorre frequentemente quando se estudam as chamadas "equações irracionais", mas às vezes ele se manifesta de forma sutil, provocando perplexidade. (Veja Exercício 1.6.)

1.3 O Complementar de um Conjunto

A noção de complementar de um conjunto só faz pleno sentido quando se fixa um conjunto U, chamado o *universo do discurso*, ou *conjunto universo*. U poderia ser chamado o assunto da discussão ou o tema em pauta: estaremos falando somente dos elementos de U.

Uma vez fixado U, todos os elementos a serem considerados pertencerão a U e todos os conjuntos serão subconjuntos de U, ou derivados destes. Por exemplo na Geometria Plana, U é o plano. Na teoria aritmética da divisibilidade, U é o conjunto dos números inteiros.

Então, dado um conjunto A (isto é, um subconjunto de U), chama-se *complementar* de A ao conjunto A^c formado pelos objetos de U que não pertencem a A. Lembramos que fixado o conjunto A, para cada elemento x em U, vale uma, e somente uma, das alternativas: $x \in A$, ou $x \notin A$.

O fato de que, para todo $x \in U$, não existe uma outra opção além de $x \in A$ ou $x \notin A$ é conhecido em Lógica como o *princípio do terceiro excluído*, e o fato de que as alternativas $x \in A$ e $x \notin A$ não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo chama-se o *princípio da não contradição*.

Seguem-se dos princípios acima enunciados as seguintes regras operatórias referentes ao complementar:

(1) Para todo conjunto $A \subset U$, tem-se $(A^c)^c = A$. (Todo conjunto é complementar do seu complementar.)

(2) Se $A \subset B$ então $B^c \subset A^c$. (Se um conjunto está contido noutro, seu complementar contém o complementar desse outro.)

A regra (2) pode ser escrita com notação $\Rightarrow$, assumindo a forma seguinte

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad B^c \subset A^c.$$

Na realidade, na presença da regra (1), a regra (2) pode ser reforçada, valendo a equivalência abaixo

(3) $A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad B^c \subset A^c$.

Esta equivalência pode ser olhada sob o ponto de vista lógico, usando-se as propriedades P e Q que definem respectivamente os conjuntos A e B. Então o conjunto A é formado pelos elementos de U que gozam da propriedade P, enquanto que os elementos de B são todos os que (pertencem a U) e gozam da propriedade Q. As propriedades que definem os conjuntos A^c e B^c são respectivamente a *negação* de P, representada por P', e a *negação* de Q, representada por Q'. Assim, dizer que um objeto x goza da propriedade P' significa (por definição) afirmar que x não goza da propriedade P (e analogamente, para Q). Com estas convenções, a relação(3) acima lê-se assim:

(4) $P \Rightarrow Q$ se, e somente se, $Q' \Rightarrow P'$.

Noutras palavras, a implicação $P \Rightarrow Q$ (P implica Q) equivale a dizer que $Q' \Rightarrow P'$ (a negação de Q implica a negação de P).

Vejamos um exemplo.

EXEMPLO

Sejam U o conjunto dos quadriláteros convexos, R a propriedade que tem um quadrilátero x de ser um retângulo e P a propriedade de ser um paralelogramo. Então P' é a propriedade que tem um quadrilátero convexo de não ser um paralelogramo e R' a de não ser um retângulo. As implicações $R \Rightarrow P$ e $P' \Rightarrow R'$ se lêem, neste caso, assim:

(a) Se x é um retângulo então x é um paralelogramo;

(b) Se x não é um paralelogramo então x não é um retângulo.

Evidentemente, as afirmações (a) e (b) são equivalentes, ou seja, elas são apenas duas maneiras diferentes de dizer a mesma coisa.

A implicação $Q' \Rightarrow P'$ chama-se a *contrapositiva* da implicação $P \Rightarrow Q$.

Sob o ponto de vista pragmático, a contrapositiva de uma implicação nada mais é do que a mesma implicação dita com outras palavras, ou vista de um ângulo diferente. Assim por exemplo, a afirmação de que todo número primo maior do que 2 é ímpar e a afirmação de que um número par maior do que 2 não é primo dizem exatamente a mesma coisa, ou seja, exprimem a mesma ideia, só que com diferentes termos.