

Dedicamos este livro a

*Paulo, Marinalva e Giselly,
Leci e Bárbara,
Ricardo, Alba e Marcelle.*

Sumário

Prefácio

1	O Sage e a Computação em Nuvem	1
1.1	O Que É SageMath?	1
1.2	Por Que SageMath?	1
1.3	Onde Usar SageMath?	3
1.3.1	<i>Off-line</i>	3
1.3.2	<i>On-line</i>	4
1.4	CoCalc: Guia de Uso	6
1.4.1	Criando Um Projeto	6
1.4.2	Sage Worksheet	7
1.4.3	Jupyter Notebook	13
1.4.4	Documentos L ^A T _E X	15
1.4.5	<i>Upload</i> de Arquivos	16
1.4.6	Terminal de Comandos	17
1.5	Projetos Colaborativos	18
1.5.1	Adicione Colaboradores	18
1.5.2	Notificações e <i>Chats</i>	20
1.6	Ajuda	22
2	SageMath: Primeiros Passos	23
2.1	Inserindo Comandos	23
2.2	Comentários	25
2.3	Objetos e Sintaxe de Comandos	25
2.4	Obtendo Ajuda	29

2.4.1	Descobrimdo Métodos	29
2.4.2	O Comando de Ajuda:?	30
2.4.3	Completamento Tab	30
2.4.4	Acesso ao Código-Fonte	31
2.4.5	Busca Google	31
2.5	Números e Operações Aritméticas	32
2.5.1	Tipos Numéricos	32
2.5.2	Operações Básicas	32
2.5.3	Expressões Lógicas	34
2.5.4	Constantes Especiais	35
2.5.5	Aproximação Numérica	36
2.6	Variáveis	37
2.6.1	Atribuição e Nomes	37
2.6.2	Definindo Variáveis em Conjuntos Numéricos	40
2.7	Variáveis Simbólicas	42
2.8	Biblioteca de Funções	43
2.8.1	Funções Aritméticas	43
2.8.2	Funções Trigonométricas	45
2.8.3	Funções Hiperbólicas	47
2.9	Números e Funções Complexas	47
2.9.1	Números Complexos	47
2.9.2	Operações	49
2.10	Salvando Objetos e Variáveis	50
2.11	Cronometrando o Tempo	51
2.12	Sage e L ^A T _E X	51
2.13	Problemas	52
3	Introdução à Programação com Sage	57
3.1	Blocos de Código	57
3.2	Criando Funções	58
3.2.1	Função def	59
3.2.2	Função lambda	61
3.3	Variáveis Locais e Globais	63

SUMÁRIO

3.4	Documentando o Código	65
3.5	<i>Strings</i>	66
3.6	Sequências: Listas, Tuplas e Dicionários	67
3.6.1	Listas	67
3.6.2	Criando Listas	71
3.6.3	Tuplas	77
3.6.4	Mapeando Listas e Tuplas	79
3.6.5	Dicionários	80
3.7	Condicionais	82
3.7.1	if	82
3.7.2	else	83
3.8	Laços	88
3.8.1	for	88
3.8.2	while	91
3.8.3	break e continue	94
3.9	Compreensão de Listas	98
3.10	Lidando com Erros	100
3.10.1	Erros	100
3.10.2	Tratando Erros	104
3.10.3	Criando Exceções	106
3.11	Criando um Programa com Sage em CoCalc	107
3.11.1	Programa: A Conjectura de Collatz	107
3.12	Problemas	110
4	Matemática Elementar	119
4.1	Conjuntos	119
4.2	Expressões Simbólicas	122
4.2.1	Substituição	122
4.2.2	Simplificação	124
4.2.3	Expansão	127
4.2.4	Fatoração	130
4.3	Resolvendo Equações	132
4.4	Resolvendo Sistemas de Equações	135

4.4.1	Sistemas Lineares	135
4.4.2	Sistemas Não Lineares	136
4.5	Resolvendo Equações Numericamente	138
4.6	Resolvendo Inequações	140
4.7	Equações Diofantinas e de Congruência	141
4.8	Polinômios	142
4.9	Algumas Funções Estatísticas	146
4.9.1	Medidas de Posição	146
4.9.2	Medidas de Dispersão	146
4.9.3	Histograma	147
4.10	Problemas	148
5	Vetores, Matrizes e Álgebra Linear	151
5.1	Vetores	151
5.1.1	Construindo Vetores	152
5.1.2	Operação com Vetores	152
5.1.3	Norma	153
5.2	Matrizes	154
5.2.1	Criando Matrizes	155
5.2.2	Matrizes Especiais	158
5.2.3	Operações Básicas	161
5.2.4	Funções Matriciais	163
5.2.5	Submatrizes	165
5.2.6	Concatenação de Matrizes	169
5.2.7	Sistemas Lineares e Métodos de Escalonamento	171
5.2.8	Exponencial de Uma Matriz	173
5.3	Espaços e Subespaços Vetoriais	173
5.3.1	Espaços Vetoriais	174
5.3.2	Subespaços Vetoriais	177
5.3.3	Operações entre Subespaços Vetoriais	180
5.4	Produto Interno	181
5.4.1	Gram-Schmidt	184
5.5	Transformações Lineares	192

SUMÁRIO

5.5.1	Criando Transformações Lineares	192
5.5.2	Matrizes Associadas a Transformações Lineares	194
5.5.3	Operações com Transformações Lineares	196
5.5.4	Injetividade, Sobrejetividade e Bijetividade	197
5.5.5	Núcleo e Imagem	198
5.6	Teoria Espectral	200
5.6.1	Autovalores e Autovetores	200
5.6.2	Diagonalização de Operadores	203
5.6.3	Domínio, Contradomínio e Restrições	205
5.6.4	Formas Canônicas	207
5.7	Decomposições LU e QR	210
5.8	Métodos para Testar Propriedades de Matrizes	214
5.9	Problemas	216
6	Plot 2D	221
6.1	Gráficos	221
6.1.1	Gráfico Simples	221
6.1.2	Múltiplos Gráficos no Mesmo Plano	223
6.2	Curvas	225
6.2.1	Curvas em Coordenadas Paramétricas	225
6.2.2	Curvas Definidas Implicitamente	226
6.2.3	Curvas em Coordenadas Polares	226
6.3	Customizando Cores e Estilo	227
6.4	Adicionando Informações	234
6.4.1	Títulos, Legendas e Grades	234
6.4.2	Textos e Setas	237
6.5	Assíntotas Verticais ou Autointerseções	238
6.6	Plotando Pontos e Segmentos de Retas	241
6.7	Estilos de Marcações	244
6.8	Customizando Figuras	246
6.9	Opções de Preenchimento	249
6.10	Campos de Vetores	253
6.11	Curvas de Nível	254

6.12	Objetos Geométricos	257
6.12.1	Círculo, Disco, Elipse	257
6.12.2	Polígonos	260
6.13	Salvando Figuras	262
6.14	Animações Gráficas	262
6.14.1	Salvando Animações	264
6.15	Problemas	265
7	Plot 3D	269
7.1	Gráficos de Funções	269
7.1.1	Customizando as Plotagens	270
7.2	Superfícies Definidas Implicitamente	272
7.3	Superfícies Paramétricas	274
7.4	Coordenadas Cilíndricas e Superfície de Revolução	276
7.5	Coordenadas Esféricas	278
7.6	Curvas no Espaço Tridimensional	279
7.7	Poliedros	281
7.8	Salvando Figuras	283
7.9	Problemas	283
8	Cálculo Diferencial e Integral	287
8.1	Limites	287
8.1.1	Limites de Funções	288
8.1.2	Limites no Infinito	291
8.1.3	Limites Laterais	293
8.2	Derivadas	295
8.2.1	Derivada de Funções de uma Variável	295
8.2.2	Derivadas de Funções Definidas Implicitamente	299
8.2.3	Derivadas de Ordem Superior	300
8.2.4	Derivadas Parciais	301
8.2.5	Derivadas e Matrizes	303
8.3	Integral	306
8.3.1	Integral Simples	306

SUMÁRIO

8.3.2	Integrais Definidas e Impróprias	309
8.3.3	Integrais Duplas e Triplas	311
8.3.4	Integral de Linha	314
8.4	Campos de Vetores	315
8.4.1	Gradiente	316
8.4.2	Divergente	317
8.4.3	Rotacional	318
8.4.4	Laplaciano	320
8.5	Somatórios e Séries	321
8.5.1	Somatórios	321
8.5.2	Séries	323
8.5.3	Série de Taylor	324
8.6	Transformada de Laplace	325
8.7	Métodos Numéricos	326
8.7.1	Otimização Numérica	327
8.7.2	Integração Numérica	330
8.8	Problemas	337
9	Equações Diferenciais Ordinárias	343
9.1	EDOs de Primeira e Segunda Ordem	344
9.1.1	O Método resolve	344
9.1.2	O Problema de Valor Inicial	351
9.2	EDOs de Ordem Superior	354
9.2.1	Método resolve_laplace	355
9.3	Gráficos de Soluções de EDOs	360
9.4	Sistemas de Equações Diferenciais	363
9.5	Resolvendo Equações Diferenciais Numericamente	368
9.5.1	Algoritmo de Euler	369
9.5.2	Algoritmo de Euler para Sistemas de EDOs	372
9.5.3	Algoritmo de Runge-Kutta de Quarta Ordem	374
9.5.4	Algoritmo de Runge-Kutta para Sistemas	382
9.5.5	Resolvendo EDOs com o SciPy	385
9.6	Resolução de EDOs em Séries de Potências	388

9.7 Problemas	393
10 Soluções de Problemas com Sage	399
10.1 Matemática Básica	399
10.2 Desempenho	401
10.3 Séries Numéricas	403
10.4 Diferenciabilidade	404
10.5 Funções Implícitas	405
10.6 Máximos e Mínimos	407
10.7 Aproximações Numéricas	409
10.8 Cálculo Vetorial	411
10.9 Aplicações da Integral Simples	413
10.10 Equações Diferenciais	415
10.11 Integral Dupla	416
10.12 Matrizes	419
10.13 Vetores, Retas e Planos	422
10.14 Triedro de Frenet, Curvatura e Torção	425
10.15 Fractais	428
11 Projetos com Sage	435
11.1 Criptografia	435
11.1.1 El Gamal	438
11.1.2 RSA	442
11.2 Braquistócrona	444
11.3 Teorema Fundamental das Curvas	448
Apêndices	
A Matrizes e Desempenho Computacional	453
A.1 RDF <i>Versus</i> RR	454
A.2 SR <i>Versus</i> AA	455
A.3 NumPy	456

SUMÁRIO

B Otimização	459
B.1 A Linguagem Cython	459
B.2 A Linguagem Julia	461
C Solução dos Problemas Propostos	465
Referências	501
Índice Remissivo	509
Índice Remissivo dos Métodos	517

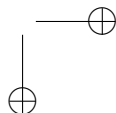
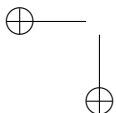
Prefácio

Softwares matemáticos tornaram viável a abordagem de problemas que outrora seriam uma tarefa impossível ou impraticável. Além disso, têm sido cada vez mais utilizados tanto no ensino quanto na pesquisa da matemática pura e aplicada. O surgimento de computadores de alto desempenho impulsionou sua aplicabilidade e, conseqüentemente, a necessidade de aprender como utilizá-los. Perante esse contexto, resolvemos produzir um texto capaz de introduzir um *software* matemático, apresentar os benefícios da computação matemática em nuvem e do uso de *softwares* livres. O presente livro introduz o *software* SageMath, ilustrando seu uso em algumas áreas básicas da matemática.

O SageMath é um *software* matemático completo, disponibilizado gratuitamente e tem código aberto. Além disso, é baseado em Python, o que propicia aos não especialistas em computação uma linguagem de programação agradável e flexível. Tais características o fazem cada vez mais popular e agora muitas universidades estão utilizando SageMath como ferramenta de apoio às disciplinas de graduação.

Em outros idiomas encontra-se uma vasta literatura sobre sistemas de computação simbólica. Em particular, existem mais de quarenta livros e muitos artigos científicos nos quais o SageMath foi empregado. Em português há uma escassez de material didático sobre esse tema. Acreditamos, portanto, que um texto sobre o assunto seria bem-vindo.

Este texto é direcionado a um amplo público, que pode variar de estudantes nas disciplinas iniciais de graduação a pesquisadores experientes. Ele é próprio para autoestudo e não exige conhecimento prévio de computação. Pode também ser usado como auxílio no estudo de algumas disciplinas, especialmente Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral e Equações Diferenciais



Ordinárias.

O livro divide-se em onze capítulos que versam sobre os tópicos: Computação em Nuvem, Introdução ao SageMath, Matemática Elementar, Álgebra Linear, Gráficos e Objetos Geométricos, Cálculo e Equações Diferenciais. Os resultados matemáticos são admitidos sem demonstração e explorados ao longo do texto, onde concomitantemente são apresentadas referências bibliográficas pertinentes.

No primeiro capítulo, são explorados os ambientes onde se pode utilizar o SageMath. Em particular, dá ênfase ao ambiente em nuvem, onde torna-se desnecessária a instalação do *software* em seu computador.

O tópico Introdução ao Sagemath é abordado nos Capítulos 2 e 3. No Capítulo 2, os elementos básicos do SageMath são explicados, e no Capítulo 3 alguns princípios de programação são apresentados direcionando os exemplos a problemas matemáticos.

O Capítulo 4 trata de temas associados a Matemática Elementar, entre os quais citamos: conjuntos, resolução de equações e inequações, e algumas funções estatísticas. No Capítulo 5, exploramos a Álgebra Linear, abordando vetores, matrizes, espaços e subespaços vetoriais e transformações lineares.

Os Capítulos 6 e 7 versam sobre a construção de objetos geométricos em duas ou três dimensões respectivamente, exemplificando através de plotagens de vários gráficos e superfícies definidas pelos mais variados tipos de equações.

Os Capítulos 8 e 9 abordam Cálculo Diferencial e Integral e as Equações Diferenciais Ordinárias, indo dos assuntos mais básicos como limites, derivadas e integrais até assuntos mais sofisticados como soluções numéricas de equações diferenciais. Cada capítulo mencionado contém uma série de problemas cujas soluções exigem aplicações dos métodos abordados previamente e alguma matemática no nível dos assuntos explorados. As respostas para todos esses problemas são apresentadas ao final do livro no Apêndice C.

O Capítulo 10 engloba uma miscelânea de problemas matemáticos resolvidos usando o SageMath. O Capítulo 11 traz três coleções selecionadas de problemas compondo Projetos a serem desenvolvidos empregando os diversos métodos apresentados ao longo do livro. Os temas abordados nesse último capítulo são: Criptografia El Gamal e RSA, o Problema da Braquistócrona,

Prefácio

e o Teorema Fundamental das curvas planas da Geometria Diferencial. Os apêndices A e B são direcionados aos usuários avançados que desejam otimizar rotinas. Os leitores podem contar com o *site* www.sagectu.com.br, onde serão disponibilizadas uma errata do livro, mais informações sobre o SageMath, bem como conteúdos auxiliares que poderão ser acrescentados. O *site* também informa como relatar erros ou fazer sugestões.

Por fim, manifestamos nossos agradecimentos ao departamento de matemática da UFRPE por ofertar um ambiente de trabalho propício ao desenvolvimento deste livro. Em particular, agradecemos aos colegas: Clessius Silva, Daniel Cassimiro, Thiago Dias (DK) e Filipe Mendonça, que leram parte do texto e/ou fizeram valiosas sugestões. Agradecemos também ao editor desta coleção, Ronaldo Garcia, e à equipe editorial da SBM pela cordialidade e profissionalismo.

RECIFE, AGOSTO de 2019

Leon Silva
Marcelo Santos
Ricardo Machado