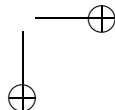
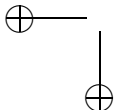


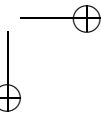
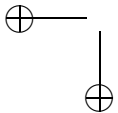
Para Sheila



*Caiu a primeira gota na terra seca
Solitária, corajosa, suicida,
Pra que molhe o chão, a planta cresça
Pra que brote o verde, a nova vida.*

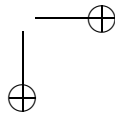
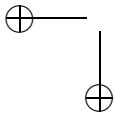
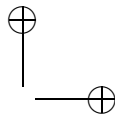
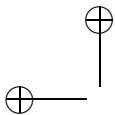
*Cairão dezenas no início
Centenas, milhares em seguida,
Mas de nada valerá o sacrifício
Se não vier a chuva decidida.*

RC



“Até onde as leis da matemática se referem à realidade, elas estão longe de constituir algo certo; e, na medida em que constituem algo certo, não se referem à realidade.”

Albert Einstein



Sumário

1	Conjuntos e Funções	1
1.1	Operações com conjuntos	1
1.1.1	União e interseção	2
1.1.2	Diferença e complementar	3
1.1.3	Produto cartesiano	3
1.2	Funções	4
1.3	Composição de funções	6
1.4	Sequências	6
1.5	Exercícios	7
2	Métricas e Normas	11
2.1	Espaços vetoriais com produto interno	13
2.2	Normas em \mathbb{R}^n	14
2.3	Exemplos de espaço vetorial normado	17
2.4	Exercícios	19
3	Abertos, Fechados, Compactos	23
3.1	Conjuntos compactos	25
3.2	Compactos de \mathbb{R}^n	28
3.3	Sequências em espaços vetoriais	31
3.4	Sequências de Cauchy	33
3.5	Sequências em \mathbb{R}^n	34
3.6	Exercícios	35

SUMÁRIO

4	Limite e Continuidade	37
4.1	Funções contínuas	39
4.1.1	Funções contínuas e conjuntos compactos	42
4.1.2	Funções contínuas e conjuntos conexos	44
4.1.3	Conjuntos convexos e funções convexas	45
4.2	Continuidade uniforme	47
4.3	Espaços vetoriais de dimensão finita	49
4.3.1	O espaço vetorial das transformações lineares	50
4.3.2	O teorema do ponto fixo de Banach	50
4.4	Semicontinuidade	52
4.5	Exercícios	56
5	Funções Diferenciáveis	65
5.1	Funções diferenciáveis: o caso escalar	66
5.1.1	O vetor gradiente	70
5.1.2	Regras básicas de derivação	71
5.1.3	Condições suficientes para a diferenciabilidade	72
5.2	Funções diferenciáveis: o caso vetorial	74
5.2.1	A matriz jacobiana	76
5.2.2	A regra da cadeia	77
5.2.3	O teorema do valor médio	78
5.2.4	Derivadas parciais: o caso vetorial	79
5.2.5	A diferencial: funções de classe C^1	80
5.3	Funções diferenciáveis: o caso geral	82
5.3.1	A projeção ortogonal é uma derivada	86
5.4	Exercícios	87
6	Curvas em \mathbb{R}^n	93
6.1	Curvas retificáveis	95
6.1.1	Curvas diferenciáveis	96
6.2	Integral de linha: o caso escalar	98
6.2.1	Aplicação: a Transformada Raios X	98
6.2.2	Funções radiais	100

SUMÁRIO

6.2.3	O problema inverso	101
6.3	O teorema fundamental do cálculo	102
6.3.1	Aplicação: conservação da energia	109
6.4	Exercícios	109
7	Derivadas de Segunda Ordem	113
7.1	Máximos e mínimos	118
7.2	Partição da unidade	124
7.3	Exercícios	128
8	O Teorema da Função Inversa	133
8.1	O teorema da função inversa	134
8.1.1	Aplicação: o método das características	140
8.2	O teorema da função inversa (bis)	142
8.3	Exercícios	145
9	O Teorema da Função Implícita	149
9.1	O teorema da função implícita	152
9.2	Multiplicadores de Lagrange	154
9.2.1	Aplicações	155
9.3	Multiplicadores de Lagrange (bis)	158
9.4	Exercícios	160
10	Sequências de Funções	165
10.1	Convergência uniforme	167
10.1.1	Convergência uniforme e derivadas	172
10.1.2	Séries de funções e convergência uniforme	175
10.1.3	O teorema de extensão de Tietze	176
10.1.4	Séries de potências	179
10.1.5	A matriz exponencial	180
10.2	Exercícios	183
11	O Espaço das Funções Contínuas	187
11.0.1	Aplicação: o teorema de Picard	188

SUMÁRIO

11.1	O teorema de Arzelà-Ascoli	190
11.1.1	Aplicação: o teorema de Cauchy-Peano	195
11.2	O teorema de Stone-Weierstrass	198
11.3	Funcionais contínuos e diferenciáveis	204
11.3.1	Aplicação: Fluxos	205
11.3.2	O Teorema da função inversa de Hadamard	209
11.4	Exercícios	213
12	A integral de Riemann	219
12.1	Áreas, volumes etc.	219
12.2	A integral de Riemann	225
12.3	Como calcular integrais?	238
12.4	Funções de conjunto e derivadas espaciais	243
12.5	Mudança de variáveis	248
12.6	Coordenadas esféricas em \mathbb{R}^n e aplicações	255
12.6.1	Aplicação: o conteúdo da bola de raio R em \mathbb{R}^n	257
12.6.2	Aplicação: integrais com domínios variáveis	259
12.6.3	Aplicação: a equação da conservação da massa	263
12.7	Exercícios	264
13	Gauss, Green, Stokes...	271
13.1	Hipersuperfícies de \mathbb{R}^n	271
13.1.1	Hipersuperfícies orientáveis	274
13.1.2	Hipersuperfícies de classe C^1	277
13.2	Integrais de hipersuperfície em \mathbb{R}^n	279
13.3	O teorema de Gauss e aplicações	283
13.3.1	O teorema de Gauss	286
13.3.2	Aplicação: as equações dos fluidos perfeitos	293
13.3.3	Aplicação: funções harmônicas e o teorema da média	296
13.3.4	O teorema de Stokes	298
13.4	Operadores diferenciais: uma questão de notação	302
13.5	Campos vetoriais da física matemática	306
13.5.1	Integrais singulares	306

SUMÁRIO

13.5.2 Campos newtonianos	311
13.5.3 Campos de Biot e Savart	319
13.5.4 Campos harmônicos	321
13.6 Formas diferenciais: uma breve introdução	323
13.6.1 O lema de Hadamard	330
13.7 Exercícios	336

Apêndice

A Determinantes, traços etc.	343
A.1 Formas n-lineares alternadas	343
A.1.1 O determinante	345
A.1.2 O determinante da matriz em blocos	350
A.1.3 O traço	352
A.2 O produto tensorial	354
A.2.1 O produto exterior	356
Referências	361
Índice Remissivo	363