Ortogonalidade: Um passeio pela Análise Funcional

Ortogonalidade: um passeio pela análise funcional

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

ISBN 978-85-8337-166-3

B928o

Bueno, Hamilton Prado
Ortogonalidade: um passeio pela análise funcional / Hamilton Prado Bueno, Grey Ercole Helder Candido Rodrigues e Antonio Zumpano. – Rio de Janeiro: SBM, 2021.

383 p. (Coleção Textos Universitários; 24)

ISBN 978-85-8337-166-3

1. Ortogonalidade. 2. Análise funcional.
3. Teoria espectral. I. Título.

Textos Universitários

Hamilton Prado Bueno
Grey Ercole
Helder Candido Rodrigues
Antonio Zumpano

Ortogonalidade: Um passeio pela Análise Funcional

1ª edição
2021
Rio de Janeiro

SBM

Prefácio

Wovon man nicht sprechen kann,
darüber muß man schweigen.[1]

Ludwig Wittgenstein

Ao escrevermos este livro, tivemos como objetivo introduzir a Análise Funcional de maneira a ressaltar seus aspectos geométricos e minimizar seus pré-requisitos. Decidimos produzir um texto que apresentasse os principais resultados da Análise Funcional Linear, mas pudesse ser apresentado no final da bacharelado ou no início do mestrado em Matemática; que fosse fonte abundante de exemplos; que contivesse aplicações relevantes.

Em suma, gostaríamos de fornecer um panorama da Análise Funcional por meio de seus resultados fundamentais, no contexto mais "concreto" possível. Nesse sentido, a escolha de espaços com produto interno é natural: a ortogonalidade possibilita-nos interpretações geométricas, e o texto poderia ser visto como continuação de um curso de Álgebra Linear. Essa escolha também influi no público-alvo do livro: ainda que pretenda introduzir a Análise Funcional para matemáticos, esse texto torna-se adequado também a físicos e engenheiros: assim, embora com enfoque diferente, existe interseção do material exposto com o excelente livro de C. Kubrusly [26].

Uma vez escolhido e delimitado nosso objeto de estudo, estávamos diante de três impasses: como elaborar um texto diferente da abundante literatura escrita em língua estrangeira? Como introduzir os teoremas da aplicação aberta e de separação de Hahn-Banach? Como evitar conhecimentos da integral de Lebesgue, necessária em qualquer estudo aprofundado da teoria de operadores e em exemplos envolvendo o operador derivação?

Para resolver nosso primeiro impasse, concentramos atenção na escolha de demonstrações, procurando evitar abordagens muito abstratas. Escolhemos enfoques

[1] Do que não se pode falar, deve-se manter o silêncio.

diferentes dos usuais, com muitos contraexemplos ilustrando as hipóteses dos principais resultados. Assim, chegamos a uma demonstração geométrica do Teorema de Separação de Hahn-Banach que, sendo tão simples, torna inusitado o fato de ela não estar presente na literatura consultada. Uma das demonstrações expostas do Teorema de Representação de Riesz utiliza bases ortonormais, também ausente dos textos consultados. O Teorema do Gráfico Fechado é apresentado de forma simples e dele derivamos o Teorema da Aplicação Aberta, como consequência quase imediata. Dessa forma, cremos ter produzido um texto bastante original, mesmo considerando a influência da obra de C. Hönig (em especial, [23]) em nosso trabalho.

Como C. Hönig [23] bem percebeu, dar exemplos significativos envolvendo o operador derivação implicava expor a teoria no contexto de espaços com produto interno e não somente em espaços de Hilbert. Essa escolha é particularmente perceptível no Capítulo 4, onde se estudam aplicações lineares $T\colon E \to F$, em que E, F são espaços com produto interno, e a primeira definição da adjunta apenas transpõe aquela utilizada em dimensão finita. Embora o ponto central do capítulo seja o estudo de operadores *contínuos* $T\colon E \to F$ e seus adjuntos, este estudo não é feito supondo que o espaço E seja completo. Nesse contexto, a adjunta de uma aplicação linear $T\colon E \to F$ nem sempre existe! Essa teoria raramente é exposta, e os livros de J. Dieudonné [14] e de C. Hönig [23] são raras exceções. Em alguns momentos esse tratamento não causa maiores dificuldades, mas, em outros, produz exemplos "patológicos", de leitura opcional ou apresentados nos exercícios. Por outro lado, para podermos apresentar os grandes teoremas da Análise Funcional, apresentamos sumariamente os rudimentos da teoria de operadores densamente definidos em espaços de Hilbert, tendo como meta a obtenção dos teoremas do Gráfico Fechado e da Aplicação Aberta.

Assim, além de nossa abordagem incomum, também a escolha de expor a teoria em espaços com produto interno não necessariamente completos diferenciaria nosso texto da literatura estrangeira existente, que usualmente considera apenas espaços de Hilbert.

Ao tentar mostrar a necessidade das principais hipóteses dos resultados apresentados e ilustrá-las com contraexemplos, o texto cresceu em tamanho. Esses estão disseminados por todo o texto: nossa experiência mostra-nos sua utilidade na preparação de alunos para o exame de qualificação do doutorado. Mas, essa escolha também teve consequências sobre nosso projeto inicial: para evitar a produção de um texto demasiadamente extenso, fomos forçados a não expor aplicações relevantes da teoria. Muitas dessas são encontradas no texto de Debnath e Mikusiński [12].

No que tange a tentar evitar a utilização de resultados abstratos, informamos que o Teorema de Baire não é utilizado explicitamente em todo o livro, apesar de exposto no Capítulo 1. (Algumas aplicações do Teorema de Baire são confinadas aos Exercícios.) Assim, ele não é empregado na demonstração dos teoremas de Banach-Steinhaus, do Gráfico Fechado e da Aplicação Aberta.

Apresentamos agora a estruturação dos capítulos deste livro.

O Capítulo 1 trata de noções básicas da topologia. Preferimos abordar unicamente a teoria de espaços normados, apesar de pequenas alterações serem suficientes para expor o material no contexto de espaços métricos: se é verdade que a topologia desses praticamente não altera as definições e provas dos resultados, o nível de abstração é muito maior e noções intuitivas quase sempre revelam-se falsas nesses espaços. Achamos que a comparação entre espaços normados e com produto interno já é rica o bastante em contraexemplos!

O Capítulo 2 introduz, de maneira tradicional, os espaços com produto interno. (Uma abordagem alternativa de sua primeira seção pode ser encontrada no Apêndice A.) A Seção 2.2 apresenta sistemas ortonormais. Achamos que, se o aluno não tiver qualquer experiência com séries de Fourier, é conveniente a exposição prévia desse tema, por exemplo, como aquela contida no Apêndice B. Grande parte dos textos introdutórios de Análise Funcional só apresenta sistemas ortonormais enumeráveis. Achamos que o tratamento do caso geral não produz grande dificuldade, mas os resultados estão expostos na Seção 2.5, que pode ser suprimida. A Seção 2.7 é mais avançada, e pode ser evitada: ela estuda a relação entre sistemas ortonormais maximais e bases ortonormais, e depende bastante de resultados contidos no Apêndice C, que apresenta o Lema de Zorn.

O Capítulo 3 apresenta as principais propriedades geométricas de espaços com produto interno. O capítulo começa relacionando o núcleo de um funcional linear e sua continuidade e generalizando a fórmula comumente empregada para o cálculo da distância de um ponto a um plano. Depois, estuda propriedades de subconjuntos convexos, expõe o Teorema de Separação de Hahn-Banach e projeção ortogonal, apresenta o Teorema de Representação de Riesz e uma versão do Teorema de Hahn-Banach. Após apresentar o Teorema de Lax-Milgram, introduz a convergência fraca e a limitação uniforme. O capítulo finaliza mostrando que espaços de Hilbert são fracamente sequencialmente compactos e expondo o Teorema de Mazur.

O Capítulo 4 estuda aplicações lineares e suas adjuntas. O estudo é feito nos contextos de aplicações $T\colon E \to F$ entre espaços com produto interno (não necessariamente completos) – generalizando a definição utilizada em dimensão finita – e no de aplicações densamente definidas entre espaços de Hilbert. No primeiro contexto, a adjunta nem sempre existe. No segundo contexto, por julgarmos ser um tópico mais avançado, limitamos nossa abordagem a conhecimentos essenciais e resultados que criam um referencial para o Teorema do Gráfico Fechado. O capítulo é abundante em exemplos e também caracteriza operadores isométricos, simétricos, antissimétricos e normais. Sua última seção mostra, como consequência do Teorema do Gráfico Fechado, o Teorema da Aplicação Aberta.

A teoria espectral é exposta no Capítulo 5. Nele estão expostas a alternativa de Fredholm e algumas propriedades básicas do espectro são mostradas no contexto geral de operadores densamente definidos. Contudo, o Teorema Espectral para operadores simétricos compactos é apresentado no contexto de aplicações $T\colon E \to E$ entre espaços com produto interno, como em [23].

Sob um enfoque geométrico, o Capítulo 6 expõe a teoria de Sturm-Liouville, dependendo inteiramente da versão apresentada anteriormente do Teorema Espectral. Esse capítulo está relacionado com o Apêndice D, que trata da teoria de oscilação de Sturm-Liouville utilizando a substituição de Prüfer, mas é independente desse.

O último capítulo do livro estuda o problema não linear $u'' = -f(u)$ para $t \in (0, 1)$, com condições de fronteira de Dirichlet. Para isso, ele usa técnicas variacionais, introduzindo espaços de Sobolev (na reta) e aplicações convexas coercivas.

Estruturação do curso. O texto apresenta mais material do que o usualmente coberto em cursos de 60 horas. Assim, utilizando esse livro, são possíveis diferentes enfoques. Para facilitar a determinação dos pré-requisitos de cada enfoque, a redação foi feita de forma a ressaltar os resultados utilizados em cada demonstração. Assim, por exemplo, a redação da prova do Teorema de Mazur (Corolário 3.47) enfatiza que boa parte da Seção 3.6 e também o Teorema de Separação de Hahn-Banach (Teorema 3.11) são pré-requisitos.

O Capítulo 1 oferece uma apresentação sucinta de boa parte dos resultados fundamentais de um curso de Topologia. Assim, qualquer que seja o enfoque adotado, cremos que a apresentação desse deve incluir a Seção 1.15, mas limitar-se aos tópicos essenciais e àqueles que fornecem pré-requisitos para a trajetória escolhida. (Embora essencial, o Teorema da Extensão Limitada é o Exercício 53 do Capítulo 1: sua demonstração foi omitida, por ser similar à de resultados expostos nesse capítulo.)

Um curso com ênfase na teoria de operadores (como em cursos de física e engenharia) pode percorrer poucos tópicos do Capítulo 2 e dedicar-se aos capítulos 3, 4 e 5. O grau de profundidade escolhido determina o quanto da teoria de operadores densamente definidos vai ser exposta.

Por sua vez, se a intenção for oferecer um painel da Análise Funcional, a apresentação de aplicações lineares densamente definidas pode ser limitada ao essencial: 4.52 até 4.56, 4.58, 4.59(iv), 4.60, 4.67 até 4.70 e então 4.72 até 4.84.

A teoria em espaços com produto interno que não são completos – especialmente a Seção 5.5 – é importante no Capítulo 6.

Agradecimentos

Agradecemos a todos os colegas e amigos que utilizaram versões preliminares deste texto. Em especial, a Luiz Gustavo Farah Dias e Marcelo Marchesin, que muito contribuíram com sugestões e correções.

Belo Horizonte, 14 de dezembro de 2020.

Hamilton Prado Bueno
Grey Ercole
Helder Candido Rodrigues
Antonio Zumpano

Sumário

Prefácio **iii**

1 Espaços Normados **1**
1.1 Espaços Vetoriais . . . 1
1.2 Espaços Normados . . . 4
1.3 Conjuntos Abertos e Fechados . . . 6
1.4 Aplicações Contínuas . . . 8
1.5 Convergências Pontual e Uniforme . . . 10
1.6 Aplicações Lineares Contínuas . . . 13
1.7 Normas Equivalentes . . . 15
1.8 Espaços de Banach . . . 16
1.9 Conjuntos Compactos . . . 18
1.10 Compactos: consequências . . . 21
1.11 Espaços Normados de Dimensão Finita . . . 22
1.12 O Teorema de Arzelà-Ascoli . . . 26
1.13 O Teorema de Baire . . . 30
1.14 O Completamento . . . 32
1.15 Exemplos de Espaços de Banach . . . 34
1.15.1 Espaços de Aplicações Lineares Contínuas . . . 34
1.15.2 Espaço de Funções Integráveis . . . 35
1.15.3 Espaços de Sequências . . . 37
1.15.4 As Desigualdades de Hölder e Minkowski . . . 37
1.16 Exercícios . . . 42

2 Espaços com Produto Interno **53**
2.1 Produto Interno . . . 53
2.2 Sistemas Ortonormais . . . 60

2.3 Sistemas Ortonormais Contáveis 62
2.4 Séries Trigonométricas de Fourier 74
2.5 Sistemas Ortonormais Não Enumeráveis 78
2.6 Isometrias e Espaços de Hilbert 81
2.7 Sistemas Ortonormais Maximais 88
2.8 Exercícios 89

3 Produto Interno e Geometria 99

3.1 Funcionais Lineares e Hiperplanos 99
3.2 Convexidade e Produto Interno 104
3.2.1 Convexos e o Ponto de Menor Norma 104
3.2.2 O Teorema de Separação de Hahn-Banach 107
3.2.3 Projeção Ortogonal 109
3.3 O Teorema de Representação de Riesz 111
3.4 O Teorema de Lax-Milgram 116
3.5 Limitação Uniforme 121
3.6 Convergência Fraca 123
3.7 Exercícios 129

4 Aplicações Lineares e Adjuntas 137

4.1 Exemplos 138
4.2 A Adjunta 142
4.3 Propriedades Geométricas da Adjunta 149
4.4 Classes de Aplicações Lineares 153
4.5 A Adjunta de Aplicações Descontínuas 160
4.6 Operadores Autoadjuntos 164
4.7 O Teorema do Gráfico Fechado 166
4.8 O Teorema da Aplicação Aberta 171
4.9 Exercícios 173

5 Teoria Espectral 189

5.1 Aplicações Lineares Compactas 189
5.2 A alternativa de Fredholm 194
5.3 O Espectro 198
5.4 Propriedades Básicas do Espectro 202
5.5 O Espectro de Operadores Simétricos Compactos 207

5.6 Operadores Normais Compactos 213
5.7 Outras Propriedades do Espectro 214
5.8 Exercícios 216

6 O Problema de Sturm-Liouville **225**
6.1 Definições e Exemplos 225
6.2 Limitação inferior dos autovalores 231
6.3 A função de Green 234
6.4 Autovalores do problema de Sturm-Liouville 242
6.5 A função de Green generalizada 244
6.6 Exercícios 253

7 Introdução aos espaços de Sobolev **261**
7.1 O Lagrangiano 262
7.2 Funções Teste 267
7.3 Um Espaço de Sobolev: $W^{1,2}$ 270
7.4 O subespaço $W_0^{1,2}$ 275
7.5 De Volta ao Lagrangiano 279
7.6 Pontos Críticos 282
7.7 Exercícios 286

Apêndices

A Formas e Produto Interno **295**
A.1 Aplicações Sesquilineares 295
A.2 Formas Hermitianas e Quadráticas 297
A.3 Formas Hermitianas 300
A.4 Formas Contínuas 306
A.5 Exercícios 309

B Séries de Fourier **311**
B.1 A Corda Vibrante 311
B.2 Separação de Variáveis 312
B.3 Chega de Formalismo! 318
B.4 Convergência Quadrática 319

B.5 Convergência Uniforme 323
B.6 Voltando à Convergência Quadrática 326
B.7 Convergência Pontual 329
B.8 Solução do Problema da Corda Vibrante 334
B.9 Exercícios 334

C O Lema de Zorn **337**
C.1 Relações de Ordem 337
C.2 Dimensão de um espaço de Hilbert 341
C.3 Exercícios 344

D Oscilação e Sturm-Liouville **345**
D.1 A substituição de Prüfer 345
D.2 O teorema de comparação de Sturm 347
D.3 Oscilação no Problema de Sturm-Liouville 350
D.4 Exercícios 354

Índice Remissivo **359**