Geometrias: Euclidiana, Esférica e Hiperbólica

Geometrias: euclidiana, esférica e hiperbólica
Copyright © 2019 Celso Melchiades Doria
Direitos reservados pela Sociedade Brasileira de Matemática
A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte,
constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Sociedade Brasileira de Matemática
Presidente: Paolo Piccione
Vice-Presidente: Nancy Garcia
Diretores:
Walcy Santos
Gregório Pacelli
Marcio Gomes Soares
João Xavier

Editor Executivo
Hilário Alencar

Assessor Editorial
Tiago Costa Rocha

Coleção Textos Universitários

Comitê Editorial
Bernardo N B de Lima
Djairo de Figueiredo
José Cuminato
José Espinar
Ronaldo Garcia (Editor-chefe)
Silvia Lopes

Capa
Pablo Diego Regino sob projeto de Adriana Moreno

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073 / 2529-5095
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

ISBN 978-85-8337-154-0

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento da Informação da
Biblioteca Professor Achille Bassi – ICMC/USP

D696g

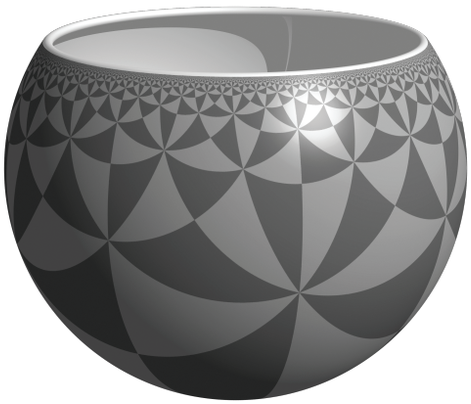
Doria, Celso Melchiades
Geometrias: euclidiana, esférica e hiperbólica/ Celso Melchiades Doria. – Rio de Janeiro: SBM, 2019.
405 p. (Coleção Textos Universitários; 22)
ISBN 978-85-8337-154-0
1. Geometria euclidiana. 2. Geometria esférica.
3. Geometria hiperbólica. I. Título.

CRB – 8/4938

TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

Celso Melchiades Doria

Geometrias: Euclidiana, Esférica e Hiperbólica



1ª edição
2019
Rio de Janeiro

Sumário

Introdução **1**

1 Conceitos Básicos I **15**

1.1 Grupos, Subgrupos e Homomorfismos 15

1.1.1 Grupos 15

1.1.2 Subgrupos 23

1.1.3 Classes Laterais e Teorema de Lagrange 26

1.1.4 Homomorfismos de Grupos 28

1.2 Métricas Riemannianas 30

1.2.1 Grupo de Isometria 39

1.2.2 Aplicações Conformes 41

2 Geometria Euclidiana **43**

2.1 Geodésicas em $\mathbb{E}^2$ 44

2.2 Isometrias de $\mathbb{E}^2$ 45

3 Geometria Esférica **65**

3.1 A Esfera $\mathbb{S}^2$ 65

3.1.1 Coordenadas Esféricas 65

3.2 Métrica Esférica 71

3.3 Transformações Ortogonais em $\mathbb{E}^3$ 74

3.4 Geodésicas de $\mathbb{S}^2$ 79

3.5 Isometrias de $\mathbb{S}^2$ 82

3.6 Relações Métricas em $\mathbb{S}^2$ 84

3.6.1 Área de um Triângulo Esférico 93

4 Geometria Hiperbólica **97**
4.1 Espaço Hiperbólico 97
4.1.1 Reflexões no Espaço Hiperbólico 100
4.2 Geodésicas de $\mathbb{H}^2$ 106
4.2.1 Produto Angular entre Geodésicas 110
4.3 Isometrias de $\mathbb{H}^2$ 114
4.4 Modelos Hiperbólicos 122
4.4.1 Modelo de Poincaré $\mathbb{H}^2_{\mathcal{P}}$ 122
4.4.2 Modelo de Minkowski $\mathbb{H}^2_{\mathcal{M}}$ 125
4.4.3 Modelo de Klein $\mathbb{H}^2_{\mathcal{K}}$ 127
4.5 Relações Métricas Hiperbólicas 130
4.5.1 Distância Hiperbólica 130
4.5.2 Convexidade e Ângulos em $\mathbb{H}^2$ 134
4.5.3 Relações Métricas em Triângulos Hiperbólicos 135
4.5.4 Área de uma região em $\mathbb{H}^2$ 145
4.6 Identidades Métricas 147
4.6.1 Distância de um Ponto a uma Geodésica 147
4.6.2 A Mediatriz de um Segmento 150
4.6.3 A Distância entre Geodésicas 150
4.6.4 A Bissetriz de duas Geodésicas 151
4.6.5 Relações Métricas em Polígonos 153
4.7 Geometria das Isometrias de $\mathbb{H}^2$ 162
4.7.1 Classificação das Isometrias 163
4.7.2 Classes de Conjugação e Centralizadores 167
4.7.3 A Função Deslocamento 176
4.7.4 A Geometria do Produto de Isometrias 179
4.7.5 A Geometria dos Comutadores 185

5 Conceitos Básicos II: Ação de Grupo, Espaço Orbital **191**
5.1 Ações de Grupos 191
5.2 Característica de Euler de uma Ação 203

6 Subgrupos Discretos de Isom($\mathbb{E}^2$) 207
6.1 Subgrupos Discretos de O_2 208
6.2 Subgrupos Discretos do Grupo de Translações $\mathcal{T}$ 213
6.3 Classificação I: Subgrupos Discretos de Isom($\mathbb{E}^2$) 215
6.4 Grupos Triangulares 221
6.5 Classificação II: Subgrupos Discretos de Isom($\mathbb{E}^2$) 231

7 Subgrupos Discretos de Isom($\mathbb{S}^2$) 255
7.1 Subgrupos Discretos de Isom($\mathbb{S}^2$) 255
7.1.1 Ações de $\mathbb{Z}_n$ e D_n sobre $\mathbb{S}^2$ 257
7.2 Grupos Triangulares 259

8 Subgrupos Discretos de Isom($\mathbb{H}^2$) 271
8.1 Grupos fuchsianos 271
8.2 Grupos Puramente Hiperbólicos 274
8.3 Conjuntos Limites. Classificação por Espécie 282
8.4 Polígonos Fundamentais 286
8.4.1 Grupos de Schottky 293
8.5 Polígonos de Dirichlet. Teorema de Poincaré 297
8.5.1 Região de Nielsen 301
8.6 Superfícies de *genus* $g \geq 2$ 304
8.7 Grupos Triangulares 313

9 Superfícies 327
9.1 Superfícies 327
9.1.1 Geometria e Topologia das Superfícies 330
9.1.2 Funções Diferenciáveis entre Superfícies 336
9.1.3 Métrica Riemanniana 337
9.1.4 Grupo de Isometria 339
9.1.5 Transformações Conformes 339
9.2 Espaço Orbital Ω/G 340
9.2.1 Plano Tangente a Ω/G 342
9.2.2 Métrica induzida sobre o Orbital Ω/G 343

9.3 Característica de Euler de um Espaço Orbital 344
9.4 Espaços Homogêneos 358
9.5 Fibrados Tangente e Cotangente 363
9.5.1 Fibrado Tangente TM 363
9.5.2 Fibrado Cotangente T^*M. Isomorfismo $g : TM \to T^*M$ 369
9.6 Derivada Covariante 372
9.7 Conexão de Levi-Civita 377
9.8 Curvatura 379
9.8.1 Curvatura de Ricci e Curvatura Escalar 385
9.8.2 Interpretação da Curvatura 386
9.9 Geodésicas 390
9.9.1 Geodésicas de $\mathbb{S}^2$ 394

Índice Remissivo **401**

Prefácio

Geometria é uma das principais áreas da Matemática desde a antiguidade. A importância decorre dos problemas resolvidos, da aplicabilidade dos resultados e da evolução do pensamento humano consequente da evolução da teoria. O objetivo deste texto é introduzir Geometria através de modelos concretos, tangíveis e visuais.

O conceito de geometria levou séculos para ser desvendado e compreendido. A descoberta das geometrias Não Euclidianas representou um enorme corte epistemológico no conhecimento baseado num sistema lógico-dedutivo. Euclides de Alexandria (300 A.C.) escreveu o livro *Elementos*, que era um compêndio sobre Geometria, e de fato o livro descrevia o estado da arte na sua época. Foi o primeiro texto matemático escrito com o rigor lógico-dedutivo, o que nos permite atribuir a Euclides o pioneirismo no emprego do método científico na Matemática. Euclides foi um gigante ao criar um sistema de cinco axiomas e extrair como consequência deles todos os resultados conhecidos naquele período. Para uma discussão detalhada dos axiomas de Euclides recomendamos o livro Wolf [30], o qual juntamente com Heilbronn [17] são as nossas principais fontes para os fatos históricos que citaremos na Introdução. A fonte original para muito autores é o livro [8].

Para os fins do presente texto, geometria é um par (Ω, g), onde Ω é um dos seguintes espaços:
- $\Omega = \mathbb{R}^2$, o plano cartesiano,
- $\Omega = S^2$, a esfera centrada na origem de raio 1,
- $\Omega = H_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, o semiplano superior no plano cartesiano.

O termo g é uma métrica riemanniana definida sobre Ω. Em cada um dos espaços consideramos a seguinte métrica riemanniana;

- Em $\mathbb{R}^2$, g_e a métrica euclidiana.
- Em S^2, g_s a métrica esférica.
- Em H_+, g_h, a métrica hiperbólica.

As geometrias estudadas no texto são as seguintes;

• Geometria Euclidiana $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, g_e)$.
• Geometria Esférica $\mathbb{S}^2 = (S^2, g_s)$.
• Geometria Hiperbólica $\mathbb{H}^2 = (H_+, g_h)$.

A abordagem é analítica, ignoramos por completo a abordagem lógico-dedutiva que parte de um conjunto de axiomas, em cada uma das geometrias, para provar as propriedades geométricas e métricas. O estudo das geometrias euclidiana, esférica e hiperbólica é realizado através de modelos de espaços munidos com uma métrica riemanniana. O objetivo é estudarmos as propriedades métricas e as simetrias de cada uma das geometrias citadas decorrentes da métrica riemanniana.

Para cada um dos modelos seguiremos o seguinte roteiro;

Roteiro

(1) Fixamos uma geometria (Ω, g) dentre as geometrias $\mathbb{E}^2$, $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{H}^2$.
(2) Determinamos todas as geodésicas da geometria (Ω, g).
(3) Determinamos o grupo $Isom(\Omega, g)$, a sua estrutura algébrica e um conjunto de geradores.
(4) Determinamos os subgrupos discretos de $Isom(\Omega, g)$ e as respectivas regiões fundamentais.
(5) Definiremos os espaços quocientes Ω/G, onde G é um subgrupo discreto de $Isom(\Omega, g)$.

Em dimensão 2, o Teorema 0.2 enunciado na Introdução garante-nos que estas são as únicas geometrias cujo espaço Ω é simplesmente conexo e a curvatura da métrica riemanniana é constante.

O roteiro descrito acima é aplicado para estudarmos geometria sobre superfícies fechadas. Assumindo o teorema de classificação das superfícies fechadas, cujo enunciado encontra-se no Capítulo 9, Teorema 9.1, obtemos ao longo do texto que toda superfície M fechada, com genus g, é geometricamente descrita de acordo com um dos seguintes itens;

(i) Se M é orientável e:

(ia) $g = 1$, então $M = T^2$ e existe um subgrupo $G < Isom(\mathbb{E}^2)$ tal que $G \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e T^2 é difeomorfo a $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$.

(ib) $g \geq 2$, então $M = T^2\#.^{g}.\#T^2$ e existe um subgrupo $G < Isom(\mathbb{H}^2)$ tal que M é difeomorfo a $\mathbb{H}^2/G$.

(ii) Se M é não orientável e:

(iia) $g = 1$, então $M = \mathbb{R}P^2$ e existe um subgrupo $G < Isom(\mathbb{S}^2)$ tal que $G \simeq \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{R}P^2$ é difeomorfo a $\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$.

(iib) $g = 2$, então $M = \mathbb{K}^2$ e existe um grupo $G < Isom_g(\mathbb{E}^2)$ tal que $G \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{K}^2$ é difeomorfo a $\mathbb{E}^2/(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2)$.

Comentários sobre os Capítulos

A proposta é estudarmos as geometrias Euclidiana e Não Euclidianas. A principal motivação para o texto foi expôr ao leitor as geometrias Euclidiana e Não Euclidianas através de modelos concretos de dimensão 2, visando assim facilitar a difusão desse conhecimento tornando-o tão geométrico, visual e tangível quanto a Geometria Euclidiana estudada na escola. Há vários textos que abordam o mesmo conteúdo, porém o fazem dentro do contexto menos elementar de superfícies de Riemann ou no contexto de grupos kleinianos.

Ao considerarmos o nível de conhecimento exigido, o conteúdo esta dividido em três partes descritas a seguir.

(1^a) Os capítulos 1-4 introduzem cada uma das geometrias através de modelos, estuda as suas propriedades geométricas e as relações métricas, por exemplo o equivalente ao Teorema de Pitágoras em cada geometria. Os pré-requisitos são Álgebra Linear, Cálculo de Funções de Várias Variáveis e aspectos básicos de Teoria de Grupo. No Capítulo 1 são introduzidos todos os conceitos básicos da Teoria de Grupo e sobre métricas riemannianas necessários ao longo do texto. O Capítulo 4 requer familiaridade com o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ e noções elementares de funções de uma variável complexa.

(2^a) Os Capítulos 5-8 tratam dos subgrupos discretos dos grupos de isometria e as suas respectivas ações. O conteúdo desses Capítulos requerem conhecimentos prévios de Teoria de Grupo, Topologia do $\mathbb{R}^n$ e um conhecimento elementar sobre a topologia das superfícies. No capítulo 5 encontram-se os

conceitos sobre ações de grupo e sobre espaços quocientes necessários para a leitura dos capítulos subsequentes.
(3^a) No Capítulo 9 encontram-se uma introdução à classificação topológica das superfícies fechadas, aspectos mais abstratos da teoria e a definição de curvatura.

Os fluxogramas nas figuras (1) e (2) indicam a inter-dependência entre os capítulos. A figura 1 contém o fluxograma para a 1ª parte do texto. A figura 2 tem o fluxograma para a 2ª parte.

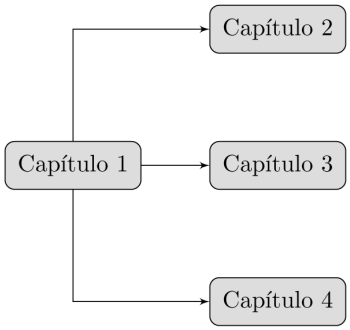


Figura 1: 1^a Parte

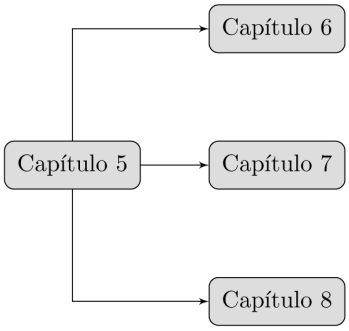


Figura 2: 2ª Parte

Caso o leitor queira focar seu estudo sobre apenas uma das geometrias e as suas respectivas simetrias, os fluxogramas nas figuras (3), (4) e (5) indicam os capítulo que deverão ser lidos, de acordo a opção;

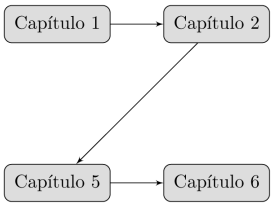


Figura 3: Geometria Euclidiana

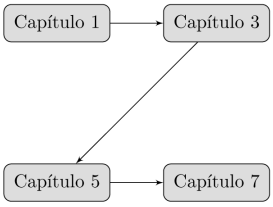


Figura 4: Geometria Esférica

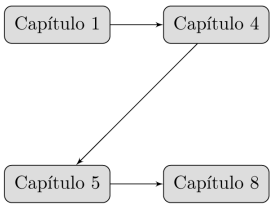


Figura 5: Geometria Hiperbólica

Agradecimento e créditos

As seguintes figuras foram gentilmente cedidas por Jos Leys, criador e administrador da página *Mathematical Imaginary* acessível pelo url http://www.josleys.com/; - imagem do vaso na capa, - na Introdução as figuras 2, 3, 4 e 5, - no Capítulo 8 as figuras 20 a 41, - no Capítulo 9 as figuras 7 a 14.

As outras figuras foram feitas com os *softwares* Geogebra e Illustrator, e a digitação com o LaTeX, conforme citados na lista bibliográfica [33] e [34].