Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies

Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superficies
Copyright © 2018 Alexandre Lymberopoulos e Ivo Terek Couto
Direitos reservados pela Sociedade Brasileira de Matemática
A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte,
constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Sociedade Brasileira de Matemática
Presidente: Paolo Piccione
Vice-Presidente: Nancy Garcia
Diretores:
Walcy Santos
Gregório Pacelli
Marcio Gomes Soares
João Xavier

Editor Executivo
Hilário Alencar

Assessor Editorial
Tiago Costa Rocha

Coleção Textos Universitários

Comitê Editorial
Bernardo N B de Lima
Djairo de Figueiredo
José Cuminato
José Espinar
Ronaldo Garcia (Editor-chefe)
Silvia Lopes

Capa
Pablo Diego Regino sob projeto de Adriana Moreno

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073 / 2529-5095
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

ISBN 978-85-8337-139-7

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento da Informação da
Biblioteca Professor Achille Bassi – ICMC/USP

L986i
Lymberopoulos, Alexandre
Introdução à geometria lorentziana: curvas e superficies / Alexandre Lymberopoulos e Ivo Terek Couto. – Rio de Janeiro: SBM, 2018.

546 p. (Coleção Textos Universitários; 21)

ISBN: 978-85-8337-139-7

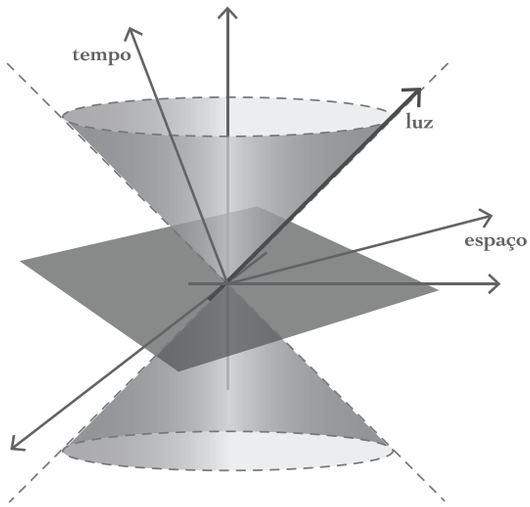
1. Geometria diferencial. 2. Curvas e superfícies.
3. Relatividade especial. I. Título.

CRB – 8/4938

TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

Ivo Terek Couto
Alexandre Lymberopoulos

Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies



1ª edição
2018
Rio de Janeiro

SBM

Para nossos pais,

E para Renata, Leticia e Natalia.

Sumário

Prefácio

1 Seja bem-vindo ao $\mathbb{L}^n$ **1**

1.1 Espaços pseudo–Euclideanos 2

1.1.1 Definindo o $\mathbb{R}^n_\nu$ 2

1.1.2 O caráter causal de um vetor em $\mathbb{R}^n_\nu$ 4

1.2 Subespaços de $\mathbb{R}^n_\nu$ 7

1.3 Contextualização em relatividade especial 31

1.4 Isometrias em $\mathbb{R}^n_\nu$ 49

1.5 Investigando $\mathsf{O}_1(2,\mathbb{R})$ e $\mathsf{O}_1(3,\mathbb{R})$ 71

1.5.1 O grupo $\mathsf{O}_1(2,\mathbb{R})$ em detalhes. 71

1.5.2 O grupo $\mathsf{O}_1(3,\mathbb{R})$ em (um pouco menos de) detalhes . . 72

1.5.3 Rotações e Impulsos 77

1.6 Produto Vetorial em $\mathbb{R}^n_\nu$ 88

1.6.1 Completando a caixa de ferramentas 93

2 Teoria Local das Curvas **103**

2.1 Curvas parametrizadas em $\mathbb{R}^n_\nu$ 105

2.2 Curvas no plano 127

2.3 Curvas no espaço 158

2.3.1 O Triedro de Frenet-Serret 159

2.3.2 Efeitos geométricos da curvatura e torção 173

2.3.3 Curvas com plano osculador degenerado 193

3 Superfícies no Espaço **209**
3.1 Topologia básica de superfícies 211
3.2 Tipo causal de superfícies, Primeira Forma Fundamental 250
3.2.1 Isometrias entre superfícies 273
3.3 Segunda Forma Fundamental e Curvaturas 287
3.4 O Problema da Diagonalização 306
3.4.1 Interpretações das curvaturas 313
3.5 Curvas em uma superfície 333
3.6 Geodésicas, métodos variacionais e energia 353
3.6.1 Triedro de Darboux-Ribaucour 358
3.6.2 Símbolos de Christoffel 369
3.6.3 Pontos críticos da Energia 374
3.7 O Teorema Fundamental das Superfícies 403
3.7.1 As Equações de Compatibilidade 403

4 Superfícies Abstratas e Tópicos Extras **417**
4.1 Métricas pseudo–Riemannianas 419
4.2 O Teorema de Riemann 451
4.3 Números para–complexos e superfícies críticas 461
4.3.1 Uma introdução rápida aos para–complexos 461
4.3.2 Transformações de Bonnet 479
4.3.3 Representação de Enneper-Weierstrass 488
4.4 Digressão: completude e causalidade 504

Apêndices

A Alguns Resultados de Cálculo Diferencial **523**

Referências **531**

Índice Remissivo **537**

Lista de Figuras

1.1 A localização dos tipos causais em $\mathbb{L}^2$. 6
1.2 A localização dos tipos causais em $\mathbb{L}^3$. 6
1.3 Exemplos de subespaços do $\mathbb{L}^3$. 14
1.4 Um vetor tipo luz contido no seu complemento ortogonal. 25
1.5 Interpretação física para tipos causais. 32
1.6 O futuro de um conjunto. 34
1.7 Paradoxo dos gêmeos. 40
1.8 Rotação de ângulo θ no sentido anti–horário. 51
1.9 Rotação hiperbólica de ângulo $\varphi > 0$. 53
1.10 Um impulso de Lorentz na direção de $\boldsymbol{v}$. 81
1.11 Esquemas para os produtos vetoriais em $\mathbb{R}^3_\nu$. 93

2.1 O círculo Euclideano unitário dentro de $\mathbb{L}^2$. 107
2.2 Uma hélice Euclideana de tipo luz no $\mathbb{L}^3$. 108
2.3 A espiral logarítmica com $a = 1$ e $b = -0.1$. 121
2.4 O diedro de Frenet-Serret em $\mathbb{R}^2_\nu$. 128
2.5 Catenárias (Euclideana e Lorentziana). 133
2.6 Curvatura da Parábola. 136
2.7 Interpretação da *forma canônica local* de uma curva plana. . . . 137
2.8 "Círculos" osculadores a uma parábola. 138
2.9 Interior de $\mathbb{H}^1$ e de uma componente de $\mathbb{S}^1_1$ em $\mathbb{L}^2$. 139
2.10 Círculos $C_{r,\nu}$ muito ou pouco curvados de uma parábola em $\mathbb{R}^2_\nu$. 140
2.11 O Fólio de Descartes para $a = 1/3$. 148
2.12 Coordenadas polares no plano Euclideano. 150
2.13 Cardioide no plano Euclideano. 151

2.14 Coordenadas de Rindler no plano Lorentziano. 152
2.15 Cardioide no plano Lorentziano. 153
2.16 A cicloide. 156
2.17 A trajetória da Curva de Viviani. 165
2.18 Curvatura e Torção da curva de Viviani em $\mathbb{R}^3_\nu$. 166
2.19 Referenciais de Frenet-Serret para a curva de Viviani em $\mathbb{R}^3_\nu$. . . 167
2.20 Uma interpretação para $\tau_{\boldsymbol{\alpha}}(0) > 0$. 176
2.21 Os análogos às esferas Euclideanas em $\mathbb{L}^3$. 177
2.22 As indicatrizes tangentes da curva de Viviani nos dois ambientes. 183
2.23 Orientações de um plano degenerado. 194
2.24 Referencial de Cartan para uma hélice de tipo luz. 199
2.25 A curva $\boldsymbol{\alpha}$. 202
2.26 Projeções nos planos coordenados do referencial de Cartan. . . . 202

3.1 Definição de superfície regular. 212
3.2 Uma parametrização regular com auto–interseção. 213
3.3 As curvas coordenadas de uma parametrização. 214
3.4 O helicoide. 216
3.5 Uma curva e a superfície de revolução gerada por ela. 218
3.6 Recordando os análogos às esferas Euclideanas em $\mathbb{L}^3$. 220
3.7 A estrutura do $\mathbb{L}^3$, em um corte. 220
3.8 Mudança de coordenadas. 222
3.9 Diferenciabilidade de uma função $f : M \to \mathbb{R}^k$. 227
3.10 Diferenciabilidade de uma função $f : M_1 \to M_2$. 229
3.11 A projeção de Lambert. 230
3.12 Um difeomorfismo entre D e $\mathbb{H}^2$. 231
3.13 A superfície como gráfico sobre um plano tangente. 236
3.14 Construindo uma faixa de Möbius. 242
3.15 Uma parametrização da faixa de Möbius. 242
3.16 Realizações da garrafa de Klein. 243
3.17 Ilustrando o critério de classificação para gráficos sobre o plano $z = 0$. 261
3.18 O cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. 262

3.19 Rotação de um triângulo em $\mathbb{L}^3$. 269
3.20 Um triângulo esférico em $\mathbb{S}^2$. 269
3.21 "Discos" em $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{S}^2_1$. 271
3.22 Isometria local entre o plano e o cilindro. 278
3.23 Isometria entre partes do catenoide e do helicoide. 279
3.24 A aplicação normal de Gauss de uma superfície. 288
3.25 As superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{L}^3$. 309
3.26 Catenoides em $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{L}^3$ (tipo espaço) e $\mathbb{L}^3$ (tipo tempo). 328
3.27 "Elementar, meu caro Watson!" 331
3.28 Vetores unitários em T_pM. 335
3.29 As linhas de curvatura em um Helicoide. 345
3.30 A superfície funil. 347
3.31 Geodésicas no cilindro. 356
3.32 Construção de um referencial adaptado a M. 359
3.33 A variação de uma curva em M. 381
3.34 As geodésicas em $\mathbb{S}^2_1$. 386

4.1 Tipos causais distintos para o "mesmo" vetor. 424
4.2 O futuro de um ponto segundo uma dada métrica Lorentziana. . 425
4.3 A isometria entre $\mathbb{D}^2$ e $\mathbb{H}^2$. 427
4.4 Geodésicas no Disco de Poincaré. 432
4.5 A pseudo–esfera. 437
4.6 A isometria $\phi = \Pi^{-1}$ entre $\mathbb{J}^2$ e $\mathbb{H}^2$. 441
4.7 Geodésicas no semi–plano de Poincaré. 442
4.8 Raios de luz em P_I. 444
4.9 Geodésicas no semi–plano de Lorentz–Poincaré. 446
4.10 A construção de uma parametrização de Fermi. 452
4.11 Curvatura Gaussiana constante $K = 1$. 457
4.12 Curvatura Gaussiana constante $K = -1$. 458
4.13 Deformação isométrica mínima do catenoide no helicoide. 484
4.14 Deformação isométrica mínima de um catenoide Lorentziano. . . 485
4.15 A superfície de Enneper em $\mathbb{R}^3$. 495
4.16 A superfície de Enneper de tipo espaço em $\mathbb{L}^3$. 495

4.17 A superfície de Catalan em $\mathbb{R}^3$. 496
4.18 O Catenoide Lorentziano de tipo espaço. 496
4.19 A superfície de Henneberg. 497
4.20 A superfície de Enneper de tipo tempo. 501
4.21 O catenoide de tipo tempo. 501
4.22 Ilustrando que $I^+(F) \not\subseteq F$. 518
4.23 Ilustrando $Z_r(\boldsymbol{p})$. 520

Prefácio

Este livro tem como objetivo abordar simultaneamente a Geometria Diferencial de curvas e superfícies em dois ambientes distintos: o Euclideano e o Lorentziano. A diferença entre eles é essencialmente a maneira de medir comprimentos, sendo o primeiro aquele ao qual estamos mais acostumados. A novidade é o estudo daqueles objetos no ambiente Lorentziano, fazendo comparações sistemáticas entre os dois casos.

A Geometria Diferencial é uma área da Matemática que consiste no estudo de propriedades geométricas de certos objetos, por meio de técnicas do Cálculo Diferencial e da Álgebra Linear, eventualmente lançando mão de outras ferramentas mais sofisticadas.

A Geometria Diferencial Lorentziana, por sua vez, extrapola o interesse para a Matemática em si, alcançando também a Física, sendo a linguagem matemática da Relatividade Geral. A motivação principal para a preparação do presente texto foi apresentar de maneira suficientemente autocontida (e, esperamos, simples) parte da vasta bibliografia sobre o assunto, que se encontra dispersa em artigos científicos, muitas vezes com uma linguagem não uniformizada.

Para começar nossa jornada precisamos entender a geometria "estática" do ambiente Lorentziano, ou seja, estudar a Álgebra Linear nesse ambiente. Isto é feito no Capítulo 1, que também apresenta resultados sobre as transformações que preservam essa geometria. Tais resultados são elaborados em paralelo aos resultados clássicos da Geometria Euclideana. Aparecem também algumas das interações do espaço de Lorentz–Minkowski com a Relatividade Especial.

No Capítulo 2, estudamos em profundidade a geometria das curvas. Para tanto, combinamos o que foi exposto no capítulo anterior com resultados do

Cálculo Diferencial e Integral em uma variável real. A teoria básica é a mesma, qualquer que seja a dimensão do ambiente, e desenvolvemos isso na primeira seção, deixando os casos específicos do plano e do espaço para as seções subsequentes.

Para completar esta introdução à Geometria Diferencial Lorentziana, fazemos um estudo sistemático das superfícies em espaços tridimensionais, elaborando a teoria conjunta dos ambientes Euclideano e Lorentziano, enfatizando as dissonâncias entre os casos, quando existirem. Aqui serão necessários os resultados dos capítulos anteriores, além das ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral em várias variáveis reais. Ao final do livro apresentamos um apêndice com os principais resultados utilizados.

O quarto capítulo tem essencialmente três objetivos: apontar a direção em que se generalizam os tópicos estudados anteriormente e à maneira moderna de abordar a Geometria Diferencial; estabelecer uma relação entre certas superfícies e variáveis complexas (ou um equivalente, ali definido) e, finalmente, discutir brevemente a interpretação da Relatividade Geral neste contexto matemático mais abstrato. Naturalmente, para a leitura desse capítulo esperamos maior maturidade matemática e boa familiaridade com a teoria de funções complexas e topologia geral.

Todas as seções são acompanhadas de muitos exercícios, mais de 300 ao total. Aqueles que são importantes para o desenvolvimento da teoria são indicados com † e muitos outros são referenciados ao longo do texto. Não contamos com que o leitor ou a leitora tenha tempo hábil de resolvê-los todos, mas esperamos que ao menos seus enunciados sejam lidos e compreendidos.

Ao longo do texto seguiremos notações usuais da literatura matemática mas, para facilitar a leitura adotaremos fontes em negrito para indicar vetores do espaço ambiente, sendo tipicamente letras gregas para curvas e romanas para vetores fixos ou superfícies parametrizadas. Quando o parâmetro de alguma curva tiver algum significado especial também usamos alguma alteração da fonte para enfatizar tal fato.

Finalmente, vários colegas contribuíram com sugestões e críticas para melhoria da apresentação e conteúdo do texto. Em particular destacamos o Prof. Antonio de Padua Franco Filho pela leitura criteriosa do manuscrito. Agrade-

cemos também à FAPESP[1] e ao CNPq[2] pelo apoio parcial. A todos, nossos mais sinceros agradecimentos,

São Paulo, Junho de 2018

Ivo Terek Couto
Alexandre Lymberopoulos

[1]Processo 2014/09781-8. As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade do(s) autor(es) e não necessariamente refletem a visão da FAPESP.
[2]Processo 134593/2016-2.