

Os 13 desafios

Os 13 desafios

Copyright ©2022 Juliana Freire e Nicolau C. Saldanha

Direitos reservados pela Sociedade Brasileira de Matemática.

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98).

Sociedade Brasileira de Matemática

Presidente: Paolo Piccione

Vice-Presidente: Jaqueline Godoy Mesquita

Diretores: Walcy Santos

Jorge Herbert Soares de Lira

Daniel Gonçalves

Roberto Imbuzeiro

Editor Executivo

Ronaldo Alves Garcia

Assessor Editorial

Tiago Costa Rocha

Coleção Professor de Matemática

Comitê Editorial

Carlos Gustavo Moreira

Edmilson Motta (Editor-Adjunto)

Fábio Brochero

Parham Salehyan

Yuri Lima (Editor-Chefe)

Capa

Ana Luisa Passos Videira

Editoração Eletrônica

Yunelsy Nápoles Alvarez

Distribuição e vendas

Sociedade Brasileira de Matemática

Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro RJ

Telefone: (21) 2529-5073 / <http://www.sbm.org.br> / email: lojavirtual@sbm.org.br

ISBN 978-85-8337-193-9

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Freire, Juliana

Os 13 desafios / Juliana Freire, Nicolau C. Saldanha. – 1. ed. – Rio de Janeiro : Sbm, 2022. – (Coleção olimpíadas de matemática)

ISBN 978-85-8337-193-9

1. Matemática - Estudo e ensino I. Saldanha, Nicolau C. II. Título III. Série.

22-136298

CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

Aline Grazielle Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

Coleção Olimpíadas de Matemática

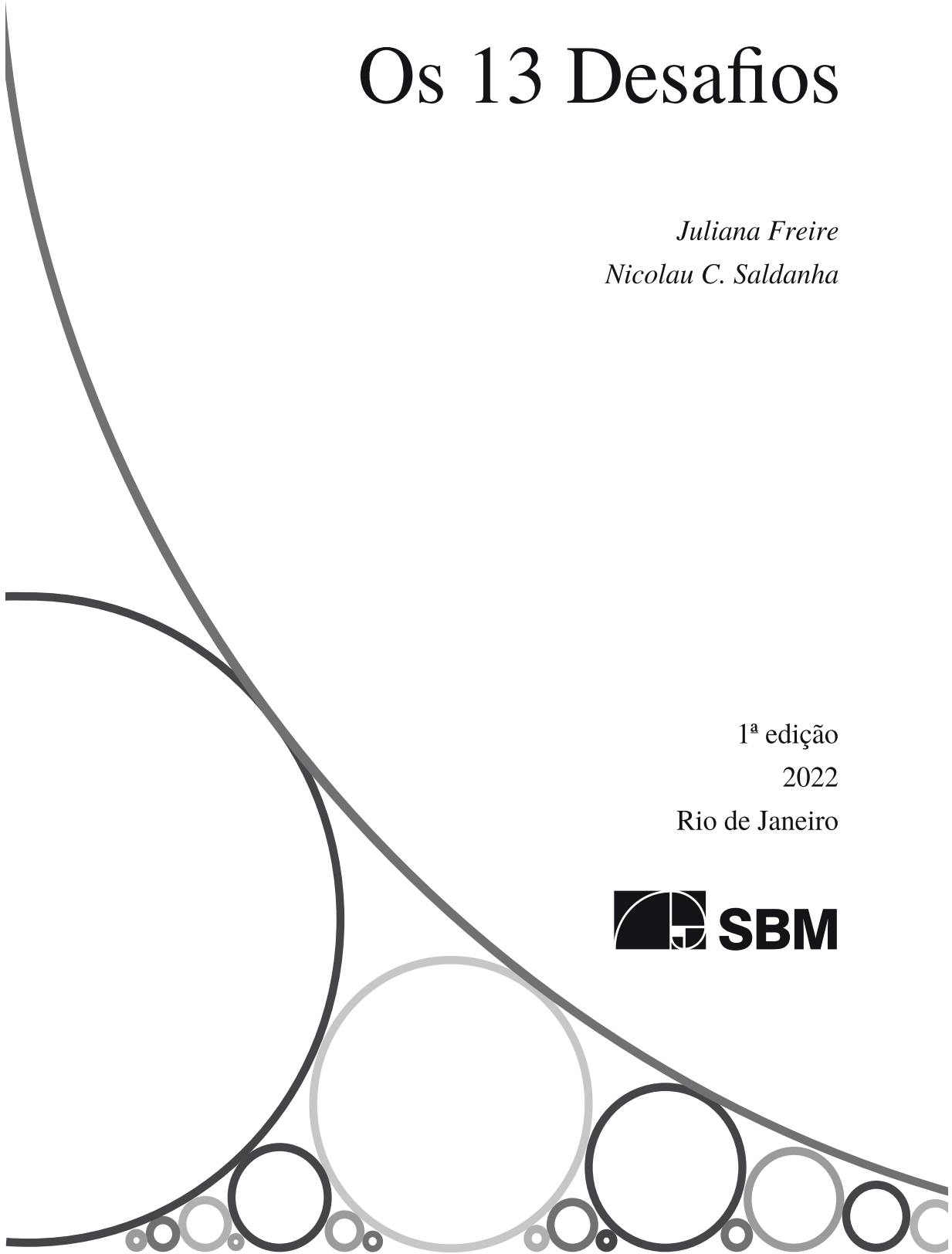
Os 13 Desafios

Juliana Freire
Nicolau C. Saldanha

1ª edição

2022

Rio de Janeiro



Sumário

1	Introdução	1
2	Enunciados	5
3	Problemas Superacessíveis	45
4	Geometria Plana	75
5	Geometria Espacial	101
6	Polinômios	135
7	Desigualdades	147
8	Teoria dos Números	153
9	Questões Recursivas	175
10	Trigonometria e Raízes da Unidade	199
11	Contagem	219
12	Probabilidade	231
13	Últimos Problemas	251

1 | Introdução

1.1 (Nicolau)

Os Desafios em Matemática começaram na PUC-Rio em 2008. São provas de Matemática bem mais difíceis do que o Vestibular, sob muitos aspectos semelhantes às Olimpíadas de Matemática. Os Desafios foram criados para podermos através deles premiar, inclusive com bolsas, alguns dentre os melhores alunos interessados em estudar Matemática.

Os Desafios não têm um programa oficial. A ideia é que eles tenham problemas difíceis de Matemática Elementar. Ou seja, eles não exigem Cálculo, Álgebra Linear ou outros assuntos tradicionalmente estudados na Universidade. Ao contrário de algumas Olimpíadas de Matemática, entretanto, os problemas, sim, cobrem Geometria Espacial e Probabilidade.

Neste livro daremos primeiro os enunciados de todos os problemas e depois as soluções e comentários. As soluções são agrupadas por temas, em parte para que possam existir comentários comparando problemas relacionados. Este livro é de certa forma parecido com muitos outros que colecionam problemas de Olimpíadas de Matemática, como por exemplo [4, 7, 8].

Uma boa forma de usar este livro, e de estudar Matemática em geral, é resolver (ou pelo menos tentar resolver) problemas difíceis. O leitor, especialmente se for um aluno, é portanto encorajado a ler o enunciado e tentar resolver o problema antes de olhar a solução. Para os problemas mais difíceis, o leitor pode querer dedicar vários dias a tentar resolvê-los. É recomendável escrever a solução de forma organizada. Se houver alguém que possa ler e criticar a solução, melhor ainda. Mesmo sabendo resolver um problema, a solução do livro pode ajudar a elucidar alguns pontos.

Alguns trechos são assinados por um dos dois autores. O leitor observará que os estilos são diferentes.

1.2 (Juliana)

Eu gosto muito das provas do Desafio PUC. Assim como Olimpíadas de Matemática, elas contêm várias questões de nível de dificuldade elevadíssimo; mas por outro lado também contêm questões (em geral, as primeiras da prova) que são completamente acessíveis a bons alunos do Ensino Médio, mesmo aqueles sem nenhum histórico de participação em Olimpíadas.

Entretanto, mesmo os bons alunos podem se beneficiar de um preparo específico para cada prova que vão fazer. O preparo para os vestibulares provavelmente não é do mesmo tipo de que o aluno precisa para desenvolver todo o seu potencial em uma prova como essa. Apesar de não conter quase nenhum conteúdo (com algumas exceções) fora do que já é apresentado no Ensino Médio, este livro está cheio de ideias de formas variadas de como você pode aplicar esses conteúdos. Por mais que questões interessantes de Matemática requeiram o uso de criatividade, é sempre mais fácil ser criativo quando você já viu uma grande quantidade de outras situações interessantes parecidas, e pode ter novas ideias sendo inspirado pelo que foi feito nas questões anteriores.

A decisão de dividir as questões por capítulos temáticos em vez de apresentar os gabaritos em ordem cronológica não foi fácil — e, no caso de algumas questões específicas, escolher em qual capítulo elas deveriam ficar foi bem difícil! Não queremos dizer que as categorias são separadas, e nem que você deva “aprender” alguma estratégia “padrão” para cada “tipo” de questão (muito pelo contrário). Mas, se você estiver procurando por mais questões relacionadas a uma que você tentou resolver, ou estiver tentando aprofundar-se especificamente em um dado tema, achamos que seria útil ter as questões separadas assim.

Se você for um bom aluno do Ensino Médio mas que não tem histórico de participação em Olimpíadas, uma possível forma de usar este livro seria começar pelo Capítulo 3, fazendo as questões em ordem. Tente não ver as soluções antes de resolver os problemas! Depois disso, você pode escolher outro capítulo e fazer a mesma coisa. Até certo ponto, dentro de cada capítulo as questões vão aumentando de dificuldade, mas nem sempre.

Um aluno mais experiente poderia usar o livro de outra forma: escolha um ano e tente fazer todas as questões da prova daquele ano, que podem ser encontradas

no Capítulo 2. Para conferir as suas soluções com os gabaritos, note que cada questão indica no final do enunciado em qual seção o seu gabarito está.

O livro está separado em “gabaritos” e “comentários”. Em geral, a ordem é: questão – gabarito – comentário... Mas nem sempre. Os gabaritos tentam ser sucintos e auto-contidos. Quando há algo que tentamos explicar em mais detalhes, possivelmente fazendo referência à resolução de outras questões, isso está nos “comentários”.

Divirta-se!

