Sumário

Prefácio IX

1 Contextualização **1**
- 1.1 Introdução 1
- 1.2 Organização do texto 2
- 1.3 Sugestão de bibliografia adicional 5

2 Adimensionalização, análise de escalas e aproximação **9**
- 2.1 Adimensionalização 9
- 2.2 Exemplo: problema do projétil 17
- 2.3 Exercícios 23

3 Introdução à análise assintótica **27**
- 3.1 Introdução 27
- 3.2 Resultados básicos 27
- 3.3 Símbolos de ordem 31

3.4 Aproximações assintóticas 36
3.5 Expansões assintóticas e funções de calibração 39
3.6 Manipulando expansões assintóticas 52
3.7 Exercícios 54

4 Equações não lineares: algébricas e transcendentais 59
4.1 Equações envolvendo termos pequenos 60
4.2 Um problema singular 65
4.3 Equações com funções exponenciais 68
4.4 Equações com funções trigonométricas 74
4.5 Métodos iterativos 75
4.6 Exercícios 77

5 Solução de equações diferenciais: perturbações regulares 81
5.1 Introdução 81
5.2 Aproximações uniformes 87
5.3 Aproximações para tempos limites: parâmetros artificiais 92
5.4 Exercícios 100

6 Solução de equações diferenciais: problemas singulares 103
6.1 Introdução 103
6.2 Reescala de equações diferenciais: considerações gerais 105
6.3 Exemplo de um problema homogêneo 107
6.4 Exemplo de um problema não homogêneo 129
6.5 Múltiplas camadas limite 135
6.6 Camadas limites aninhadas 139
6.7 Exemplo de um problema não linear 140
6.8 Camadas interiores 142

6.9 Um caso especial de camada limite interior 151
6.10 Camadas iniciais 158
6.11 Método de coordenadas deformadas 161
6.12 Exercícios 170

7 Logaritmos e correção de ordem 179
7.1 Logaritmos 179
7.2 Um problema ainda mais difícil 191
7.3 Exercícios 197

8 Método de múltiplas escalas 199
8.1 Introdução 199
8.2 Nota sobre ressonância 201
8.3 Problema com crescimento secular 204
8.4 Derivação da equação do oscilador com amortecimento fraco 211
8.5 O problema com amortecimento fraco 215
8.6 Coeficientes com variação lenta 228
8.7 Camadas limites 234
8.8 Mais exemplos de múltiplas escalas 237
8.9 Exercícios 246

9 O Método WKB 251
9.1 Introdução 251
9.2 O método WKB 254
9.3 Pontos de inflexão (WKB1-camada limite-WKB2) . . . 265
9.4 Método WKB - Generalizações 273
9.5 Exercícios 290

10 Equações diferenciais parciais **293**
10.1 Método da perturbação regular 293
10.2 Exemplos de problemas singulares 300
10.3 Exemplos de correção de ordem: escoamento viscoso lento 330
10.4 Múltiplas escalas 338
10.5 O método WKB 361
10.6 Exercícios 375

Apêndice **381**
A.1 Regra da cadeia para derivadas parciais 381
A.2 Solução de EDOs elementares 383
A.3 Maple 389
A.4 Exemplos de séries de Taylor (Maclaurin) 393
A.5 Função Gama 394
A.6 Série binomial 394
A.7 Funções de Airy 397
A.8 Função exponencial integral 398
A.9 Outros resultados úteis 398

Referências básicas **403**

Trabalhos de pesquisa **407**

Índice Remissivo **416**

Prefácio

Embora atualmente um grande número de livros em Inglês cobrindo o tópico de métodos de perturbação esteja disponível, muitos dos quais referenciados neste texto, é surpreendente que não haja nenhum em Português, visto que o Português é a quinta língua mais falada no mundo – bem acima de 200 milhões de falantes nativos. Foi essa a principal motivação para a redação deste livro: fornecer um texto introdutório para graduandos em matemática, engenharia, e ciências exatas em geral, apresentando os conceitos e técnicas básicos desse tópico em sua língua nativa.

Ao longo do caminho, começamos a perceber que teríamos de enfrentar um problema que pelo menos um de nós não havia previsto (embora talvez fosse este um bom problema de se ter): não havia consenso geral quanto à tradução para o português de muitos dos termos técnicos que surgem em métodos de perturbação. Assim, tornou-se uma tarefa importante a escolha de uma tradução para termos do inglês como "*matching*", "*matched asymptotic expansions*" e "*switch-*

backing", e esperamos que os leitores fiquem satisfeitos com nossas escolhas.

Deixando a questão linguística de lado e movendo em direção ao conteúdo matemático, o livro pretende servir como uma introdução às técnicas de construção de uma aproximação da solução de problemas que de outra forma seriam intratáveis, ou bastante trabalhosos. A estrutura do livro é fornecida no capítulo 1 e, portanto, não o fazemos aqui. Todos os métodos dependem da existência de um parâmetro do problema que é relativamente pequeno (ou grande). Tal situação é comum em aplicações, e esta é uma das razões pelas quais os métodos de perturbação são a pedra angular da matemática aplicada. Um dos outros pilares é a computação científica, e é interessante que as duas disciplinas tenham crescido juntas, embora isso talvez fosse esperado, dadas as suas respectivas capacidades e complementaridade.

Usando um computador, é possível resolver numericamente problemas não lineares, não homogêneos e multidimensionais, com alta precisão. As desvantagens são que soluções numéricas obtidas por meio de um computador não fornecem uma boa percepção sobre a física do problema, e sempre haverá a dúvida se a solução computada está correta ou não. Por outro lado, os métodos de perturbação também são capazes de lidar com problemas não lineares, não homogêneos e multidimensionais, embora reconhecidamente não com a mesma facilidade que as soluções geradas por computador. A principal motivação para usar métodos de perturbação é obter uma expressão razoavelmente precisa para a solução. Ao assim proceder, pode-se obter uma maior compreensão da física do problema. Além disso, pode-se usar o resultado, em conjunto com o problema original, para obter procedimentos numéricos mais eficientes para calcular uma solução. De fato, em nossa própria experiência, foi até mesmo possível usar métodos de perturbação para obter uma formulação reduzida que exigiu entre duas a três ordens de magnitude menos tempo de computação para calculá-la, sem sacrificar em nada a física presente no problema original resultando em soluções que até concordaram quantitativamente com as da formulação original.

Para concluir, gostaríamos de agradecer aos seguintes colaboradores pelo apoio que recebemos ao longo do caminho: Prof. Sean McKee (University of Strathclyde, Reino Unido) por apresentar os autores uns aos outros; Prof. Stephen O'Brien (University of Limerick, Irlanda), pela colaboração com as primeiras versões em inglês do que se tornou este livro; Dr. Milton Assunção pela revisão das primeiras versões em português. Por último, ambos os autores são agradecidos aos auxílios financeiros recebidos da Universidade de São Paulo USP, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnológico (CNPq, Proc. 401945/2012-0) por meio de bolsa de professor visitante concedidas ao primeiro autor, e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Fapesp) por meio do projeto Centros de Pesquisa, Inovação e Difusão - Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria (Cepid-CeMEAI, Proc. 2013/07375-0) que apoiou a ambos os autores.

São Carlos, Dezembro de 2021

Michael Vynnycky
José Alberto Cuminato

1 Contextualização

1.1 Introdução

Nas áreas de matemática aplicada, ciência da computação e engenharia, particularmente no estudo de algoritmos, a análise assintótica é uma ferramenta valiosa, projetada para descrever o comportamento limite. Exemplos de aplicações incluem o desempenho de algoritmos quando alimentados por um volume muito grande de dados de entrada ou o comportamento de sistemas físicos muito grandes. Como ilustração, suponha que se tenha interesse em estudar as propriedades de uma função $f(n)$ quando n torna-se muito grande. Se $f(n) = n^2+3n$, então o termo $3n$ torna-se insignificante comparado com n^2. A função $f(n)$ é considerada "assintoticamente equivalente a n^2, quando $n \to \infty$". Frequentemente, isso é escrito simbolicamente como $f(n) \sim n^2$, que é lido como "$f(n)$ tem comportamento assintótico a (é assintótico a) n^2". Outro exemplo importante de comportamento assintótico é o teorema dos números primos, segundo o qual se $\pi(x)$ é a quantidade de números primos que são menores ou iguais a x, então

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

No entanto, embora esses exemplos sirvam para ilustrar o conceito de uma forma simples, eles estão um pouco aquém do foco principal deste texto, que se centra no desenvolvimento da análise assintótica como ferramenta para encontrar soluções aproximadas de equações diferenciais não lineares, que de outra forma seriam analiticamente intratáveis.

1.2 Organização do texto

Este texto está estruturado da seguinte forma:

- O capítulo 2 introduz o importante conceito de adimensionalização por meio de dois exemplos motivadores. Nesse capítulo são também apresentados os conceitos de escala[1], e reescala[2] das variáveis de um problema.

- A maioria das definições e conceitos fundamentais que são necessários para o desenvolvimento de métodos assintóticos é apresentada no capítulo 3. Entre esses estão: os símbolos de Landau, o, O e O_s, para denotar a ordem de magnitude de uma quantidade determinada; as expansões e aproximações assintóticas; o caráter uniforme de uma aproximação assintótica; o significado, uso e exemplos de funções de calibração[3]; a questão da convergência de uma série assintótica.

[1] *scaling*, em inglês
[2] *rescaling*, em inglês
[3] *gauge functions*, em inglês

- O capítulo 4 lança mão das equações algébricas e transcendentais para demonstrar concretamente os conceitos definidos nos capítulos anteriores e para introduzir mais dois conceitos-chave: perturbações regulares e singulares.

- O conceito de perturbação singular é aplicado no capítulo 5 às equações diferenciais ordinárias (EDOs). Também é discutido nesse capítulo o uso de parâmetros artificiais para determinar o comportamento de uma solução.

- O capítulo 6 aborda um aspecto consideravelmente mais difícil das perturbações singulares para equações diferenciais. O método de expansões assintóticas compatibilizadas[4], junto com a regra de Van Dyke ou ainda o uso de uma variável intermediária são as técnicas apresentadas e discutidas nesse capítulo. No centro dessa discussão está o conceito de camada limite, cuja presença é normalmente identificada quando a derivada de mais alta ordem em uma equação diferencial está multiplicada por um parâmetro pequeno. Esse estudo é aprofundado considerando tópicos mais complexos tais como: camadas limites múltiplas (ou aninhadas[5]); camadas interiores; camadas de canto.[6]

- O capítulo 7 analisa a aplicação da teoria de perturbação singular para o caso em que a derivada de maior ordem não está multiplicada por um parâmetro pequeno. Nessa situação, que normalmente ocorre para problemas formulados num domínio semi-infinito, surgem termos logarítmicos que podem interrom-

[4] *matched asymptotic expansions*, em inglês
[5] *nested boundary layers*, em inglês
[6] *corner layers*, em inglês