Fundamentos para a Estatística de Convergência de Variáveis Aleatórias

Fundamentos para a estatística de convergência de variáveis aleatórias

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefone: (21) 2529-5073
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

ISBN 978-65-990395-7-7

V331f

Vasconcellos, Klaus Leite Pinto
Fundamentos para a estatística de convergência de variáveis aleatórias / Klaus Leite Pinto Vasconcellos. – Rio de Janeiro: SBM, 2021.

400 p. (Coleção Matemática Aplicada; 05)

ISBN 978-65-990395-7-7

1. Probabilidade. 2. Estatística. 3. Convergência estocástica. I. Título.

05

COLEÇÃO
MATEMÁTICA
APLICADA

Fundamentos para a Estatística de Convergência de Variáveis Aleatórias

Klaus Leite Pinto Vasconcellos

1ª edição
2021
Rio de Janeiro

SBM

Um francês quis estudar,
vivendo na Grã-Bretanha,
a expansão binomial.
De forma espetacular,
seu sino foi uma façanha:
era uma curva normal.
(Klaus Vasconcellos)

Sumário

Prefácio

1 Sequências e Séries **1**
- 1.1 *Infimum* e *supremum* 1
- 1.2 Sequências de números reais 7
- 1.3 Subsequências 11
- 1.4 lim inf e lim sup 13
- 1.5 Sequências de Cauchy 19
- 1.6 Limites infinitos 21
- 1.7 Propriedades aritméticas dos limites 23
- 1.8 Ordem de grandeza 28
- 1.9 Convergência vetorial 32
- 1.10 Séries 37
- 1.11 Exercícios 50

2 Sequências de Eventos **57**
- 2.1 Sequências de conjuntos 58
- 2.2 Continuidade da probabilidade 63

2.3 Teorema de Borel-Cantelli 67
2.4 Exercícios 71

3 Convergência Quase Certa 75
3.1 Introdução 76
3.2 Convergência de Valores Esperados 79
3.2.1 Integrabilidade Uniforme 92
3.3 Lei Forte dos Grandes Números 97
3.4 Exercícios 121

4 Convergência em Probabilidade 129
4.1 Introdução 130
4.2 Consistência e consistência forte 134
4.2.1 Leis Fracas dos Grandes Números 137
4.3 Convergência em probabilidade – caso vetorial 144
4.4 Ordem em probabilidade 156
4.5 Exercícios 159

5 Funções Características 165
5.1 Números complexos 166
5.1.1 Funções complexas de variável real 171
5.1.2 Exponencial complexa 175
5.2 Funções características 183
5.3 Funções geradoras de momentos 202
5.3.1 Função geradora de probabilidades 221
5.4 Funções Características de Vetores Aleatórios 223
5.5 Exercícios 237

6 Convergência em Distribuição 245
6.1 Resultados Fundamentais 246
6.2 Convergências de sequências $O_P(1)$ 267
6.3 Teorema Central do Limite para o Caso Clássico 283
6.4 Convergência em distribuição – caso vetorial 292

6.5 Exercícios 298

7 Teorema Central do Limite **307**

7.1 Teorema central do limite de Lindeberg 308

7.2 Exercícios 344

Referências **349**

Índice Remissivo **353**

Prefácio

Este livro destina-se a ser uma referência auxiliar (não o texto principal de um curso) para os estudantes de pós-graduação em Estatística cujo trabalho de pesquisa envolva convergência de sequências aleatórias. Pode, contudo, ser também usado como material complementar em disciplina de graduação em Estatística.

Meu objetivo original, quando comecei a escrever o presente livro ao final de 2017, era o de produzir um texto didático para o curso de Bacharelado em Estatística da UFPE; mais especificamente, para a disciplina obrigatória de Probabilidade IV, do quarto período. A ementa daquela disciplina consiste justamente no estudo de convergência estocástica, e seu conteúdo coincide com o dos três últimos capítulos do conhecido livro de James [17]. Tal disciplina foi por mim criada como parte da completa reestruturação que propus do curso de Bacharelado em Estatística da UFPE em 2000, quando era então o Coordenador de Graduação do Departamento de Estatística.

Todavia, o texto foi suficientemente ampliado para que fosse possível propor a publicação de um livro para cursos de pós-graduação. Tal livro reflete bastante minha experiência de ensino nesse assunto, tanto na disciplina de Probabilidade IV, na graduação, onde a referência principal é o livro de James [17], quanto na disciplina obrigatória de Probabilidade Avançada do programa de doutorado em Estatística da UFPE, onde a referência principal é o livro de Billingsley [5].

O presente livro não é autocontido, o que significa que minha intenção não é a de que o mesmo possa ser utilizado como texto principal em cursos intermediários de Probabilidade. Pelo contrário, o objetivo aqui é fornecer uma referência específica sobre convergência estocástica que possa ser usada como material complementar.

O texto está muito longe de pretender ser um texto avançado sobre convergência estocástica; muito pelo contrário, procurou-se fazer uma "cartilha" sobre o assunto, que fosse acessível a estudantes de graduação e pós-graduação que desejam se iniciar neste tópico. Sendo assim, nenhum conhecimento de Probabilidade ao nível de Teoria da Medida é necessário, bem como nenhum conhecimento mais aprofundado de Análise.

Por outro lado, o livro exige que o estudante tenha adquirido um bom conhecimento introdutório de Probabilidade correspondente, pelo menos, aos três primeiros semestres de um bom curso de graduação em Estatística. Tal conhecimento introdutório deve incluir propriedades elementares de uma função de probabilidade, variáveis aleatórias discretas e contínuas, independência, algumas das distribuições mais importantes, como normal, Poisson, binomial, exponencial etc., função de distribuição e função densidade, vetores aleatórios discretos e contínuos, distribuição e densidade conjuntas, valor esperado, variância, propriedades da esperança e da variância, covariância e correlação. Procuramos a todo custo evitar a definição geral de esperança como a integral com relação à medida de probabilidade, pois não trabalhamos aqui com a integral de Lebesgue. Mesmo assim, praticamente todos os resultados principais aqui apresentados são demonstrados em sua generalidade, não se restringindo apenas aos casos discretos e absolutamente contínuos de variáveis aleatórias.

Importante: a principal propriedade da esperança aqui usada – que é sempre válida no caso de esperanças finitas ou variáveis aleatórias positivas – é a linearidade, que é consequência imediata da linearidade da integral de Lebesgue, conforme definido de forma geral. O leitor que não conhecê-la pode ver o valor esperado, de forma geral, conforme apresentado em James [17]; a integral de Lebesgue-Stieltjes explicada por James [17] com relação à função de distribuição (ou função de distribuição conjunta). Nesse caso, tudo o que é preciso levar em conta para acompanhar as demonstrações dos resultados aqui estabelecidos é a linearidade da esperança e o fato de que a integral de uma função não negativa também o é. A linearidade da integral mais geral (a de Lebesgue), que implica a linearidade da esperança, e o fato de que a integral de uma função não negativa também o é (que implica o fato óbvio de que $\mathrm{E}[X] \geq 0$ se $P(X \geq 0) = 1$) talvez sejam os únicos resultados que dependam da integral mais geral que aparecem ao longo do texto. Qualquer integral que apareça aqui explicitamente deve ser entendida como a integral de Riemman, aquela que é bem conhecida pelos estudantes.

De forma geral, o livro pretende ser basicamente uma ampliação daquilo que é apresentado nos três últimos capítulos de James [17], o que significa que o conhecimento de Probabilidade ao nível dos quatro primeiros capítulos daquele livro é suficiente.

Com relação à bagagem matemática, espera-se que o aluno tenha um bom conhecimento de Cálculo a nível de graduação. Um bom conhecimento elementar de Álgebra Linear adquirido na graduação é necessário para se acompanhar alguns dos tópicos apresentados.

O livro está estruturado em sete capítulos.

O primeiro capítulo trata de uma breve revisão de sequências e séries de números reais, bem como de sequências de vetores em espaços de dimensão finita. Tal capítulo pretende ser uma referência básica, que foi incluída devido à minha experiência de que muitos estudantes chegam a um curso de pós-graduação em Estatística sem um prévio conhecimento apropriado do assunto, mesmo os estudantes de doutorado. Esse capítulo pode ser dispensado para o estudante que tenha uma sólida formação sobre o assunto. De qualquer forma, há um conceito muitas vezes importante para o estudo de convergência estocástica que é lá discutido, que é o de ordem de uma sequência, e recomendamos que o leitor tenha familiaridade com ele.

É importante realçar que mesmo tendo sido os pré-requisitos do livro estabelecidos conforme descrito anteriormente, achamos que não há qualquer incoerência em se introduzir um capítulo inicial sobre convergência de sequências e séries de números reais. Tal capítulo tem, na verdade, três intenções. A primeira é a de ser uma referência bem básica ao estudante sobre o assunto. A segunda é suprir uma deficiência que muitos estudantes têm de seus cursos de graduação com relação a diversos resultados sobre convergência de sequências de números reais, tais como os próprios conceitos de $\liminf$ e $\limsup$. Finalmente, a última consiste em possibilitar ao estudante uma comparação com os conceitos de convergência que são desenvolvidos para variáveis aleatórias. Tanto é que ao longo do livro referimo-nos diversas vezes a resultados básicos que são estabelecidos no primeiro capítulo com o propósito de comparação ou de revisão.

O segundo capítulo trata de sequências de conjuntos e, particularmente, de eventos aleatórios em um espaço de probabilidade. Nele é estabelecida a continuidade geral da probabilidade e o importante teorema de Borel-Cantelli, que é essencial ao resto do livro.

O terceiro capítulo estuda o conceito de convergência quase certa de sequências de variáveis aleatórias. Mostramos os três teoremas fundamentais sobre convergência de esperanças, a saber: teorema da convergência monótona, teorema de Fatou e teorema da convergência dominada. A partir daí, são obtidos outros resultados. O conceito de integrabilidade uniforme é também discutido, pois fornece uma condição suficiente para passar a esperança para dentro do limite. Entre os resultados mais importantes do capítulo estão as leis fortes dos grandes números, que são aqui estabelecidas e discutidas.

O quarto capítulo estuda a convergência em probabilidade. Realçamos a importância desse tipo de convergência para a Probabilidade e Estatísica. Diversos resultados são discutidos, incluindo leis fracas dos grandes números e o importante conceito de ordem em probabilidade.

O quinto capítulo trata de funções características. O capítulo começa com uma breve revisão sobre números complexos, e, particularmente, sobre a exponencial complexa, pois notamos que uma deficiência na formação de muitos estudantes é o pouco conhecimento sobre esse assunto. As propriedades mais importantes da função característica são estabelecidas. Sabemos que há uma certa resistência, de forma geral, nas disciplinas de Probabilidade e Estatística do ensino superior, em apresentar aos estudantes a função característica, justamente por se tratar de uma função complexa. Por essa razão, resolvemos compará-la aqui com a função geradora de momentos e mostramos, já a partir do quinto capítulo, que o fato de a função característica ser uma função complexa é um preço muito pequeno a ser pago para que tenhamos uma função com propriedades muito mais robustas do que a função geradora de momentos. A função característica de uma distribuição vetorial também é brevemente discutida.

No sexto capítulo, apresentamos a convergência em distribuição. Os principais resultados são obtidos na primeira seção, enquanto procuramos adiar o máximo possível a apresentação do teorema de que a convergência em distribuição é equivalente à convergência pontual das respectivas funções características. Finalmente, desenvolvemos esse resultado na seção seguinte, e, a partir daí, um dos resultados mais importantes da Probabilidade e Estatística, que é o teorema central do limite para o caso i.i.d. Também discutimos brevemente extensões vetoriais de alguns dos resultados previamente apresentados no capítulo.

Finalmente, o sétimo capítulo é brevemente dedicado ao teorema central do limite de Lindeberg.

Todo texto precisa ser finito! Minha decisão foi a de que, para um livro bem introdutório, o conteúdo aqui apresentado é suficiente. Enfim, como dito antes, o objetivo do livro é exatamente este: ser um texto introdutório, quase uma cartilha. No entanto, é esperado que o estudante interessado aprofunde seus estudos, buscando livros e artigos mais sofisticados, ampliando e desenvolvendo seu conhecimento sobre o assunto. Exatamente pela importância do assunto é que podemos encontrar facilmente muitos livros que tratam do tema aqui apresentado. Entre eles, podemos, além de Billingsley [5], destacar Grimmett and Stirzaker[15], Resnick [26], Durrett [10], entre outros. Referências específicas mais avançadas que o presente livro para aqueles que têm a intenção de futuramente desenvolver pesquisa a nível de doutorado em Estatística em Teoria Assintótica podem incluir, entre outras, Lehmann [19], Ferguson [11], dasGupta [8], Serfling [31] e van der Vaart [33], esta última em um patamar um pouco mais alto.

Não posso terminar sem deixar aqui meus agradecimentos.

Inicialmente, aos professores Abraão Nascimento, Betsabé Blas, Fernanda de Bastiani, Francisco Cribari-Neto, Gauss Cordeiro, Getúlio Amaral e Manoel Sena Júnior, do Departamento de Estatística da UFPE, por terem me incentivado, ainda no final de 2017, a produzir este texto, quando existia apenas uma ideia para uma apostila em Probabilidade.

Meu agradecimento especial ao Professor Francisco Cribari-Neto e também ao Professor Gauss Cordeiro, por terem me apoiado com entusiasmo e me incentivado de forma decisiva durante todo o processo de redação deste livro.

A todo o Departamento de Estatística da UFPE, em especial à comissão formada pelos professores Audrey Cysneiros, Francisco Cysneiros e Getúlio Amaral, pela aprovação formal deste projeto, em 2018, junto ao Departamento.

À professora Maria Eulália Vares, quem primeiro me ensinou o assunto deste livro. Seus ensinamentos formam uma parte significativa deste texto.

A todos os meus amigos reais e virtuais, pelo apoio essencial para que este livro ficasse pronto.

Finalmente, à minha esposa Patrícia, a quem sou muito grato por toda sua dedicação e atenção, estando sempre comigo nos momentos mais difíceis. A ela este livro é dedicado.

Deixo este livro como um legado, fruto de mais de vinte anos de minha própria experiência ministrando disciplinas que versam sobre este tema, tanto ao nível de graduação quanto de pós-graduação.

RECIFE, NOVEMBRO de 2020.

Klaus Leite Pinto Vasconcellos