

Discretização de
Equações Diferenciais
Parciais

**Discretização de equações diferenciais parciais:
técnicas de diferenças finitas**

Copyright © 2013 José Alberto Cuminato e Messias Meneguette Junior
Direitos reservados pela Sociedade Brasileira de Matemática.

Coleção Matemática Aplicada

Comitê Editorial

Abdênago Alves de Barros
Abramo Hefez
Djairo Guedes de Figueiredo
Roberto Imbuzeiro Oliveira (Editor-Chefe)
José Alberto Cuminato
Sílvia Regina Costa Lopes

Assessor Editorial

Tiago Costa Rocha

Capa

Pablo Diego Regino

Sociedade Brasileira de Matemática

Presidente: Marcelo Viana
Vice-Presidente: Vanderlei Horita
Primeiro Secretário: Ali Tahzibi
Segundo Secretário: Luiz Manoel de Figueiredo
Terceiro Secretário: Marcela Souza
Tesoureiro: Carmen Mathias

Distribuição e vendas

Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073 / 2529-5095
<http://www.sbm.org.br> / [email:lojavirtual@sbm.org.br](mailto:lojavirtual@sbm.org.br)

ISBN 978-85-8337-005-5

FICHA CATALOGRÁFICA PREPARADA PELA SEÇÃO DE TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO
DA BIBLIOTECA PROFESSOR ACHILLE BASSI ICMC/USP

C969d

Cuminato, José Alberto.

Discretização de equações diferenciais parciais:
técnicas de diferenças finitas / José Alberto Cuminato e
Messias Meneguette Junior. – Rio de Janeiro: SBM, 2013.

379 p. (Coleção Matemática Aplicada; 02)

ISBN 978-85-8337-005-5

1. Equações diferenciais parciais - conceitos. 2.
Equações diferenciais parciais. 3. Equações parabólicas.
4. Equações elípticas. 5. Equações hiperbólicas. I.
Meneguette Junior, Messias. II. Título.

02

COLEÇÃO
MATEMÁTICA
APLICADA

Discretização de Equações Diferenciais Parciais

José Alberto Cuminato
Messias Meneguette Junior

1ª edição
2013
Rio de Janeiro



Apresentação

A análise numérica surgiu com o advento dos computadores digitais e no início do seu desenvolvimento os analistas numéricos eram encontrados apenas em laboratórios de informática. Nessa época, os analistas numéricos dedicavam-se ao desenvolvimento de métodos numéricos e pacotes elementares de software. No entanto, não muito antes do consenso de que a matemática é essencial para analisar esses métodos, os conceitos de estabilidade, consistência, convergência, mal-condicionamento, etc. já estavam sendo estudados pelos analistas numéricos mais matematicamente vocacionados. Dois exemplos clássicos desse movimento são: a definição e análise regressiva (*backward error analysis*) do erro de arredondamento para sistemas de equações lineares introduzidas por Wilkinson e a demonstração de Dahlquist de que consistência mais estabilidade (da equação de diferenças) implica convergência (para a solução da equação diferencial subjacente). Algumas pessoas imaginam que a tarefa do analista numérico é apenas a produção de software de alta qualidade o que, ironicamente, o faria desempregado rapidamente. Contudo, conforme novas áreas do conhecimento surgem, exigindo soluções e métodos numéricos mais complexos,

não surpreende que, nos dias de hoje, todo departamento de matemática respeitável abrigue grupos de pesquisadores em análise numérica. Como os computadores mudam e evoluem constantemente, é provável que a carreira de analista numérico continue sendo importante e prestigiada por muitos anos.

Este livro é um texto introdutório moderno sobre a solução numérica de equações diferenciais parciais. Ele é adequado para estudantes de graduação na área de ciências exatas, fornecendo os conceitos básicos, apresentando os métodos numéricos clássicos, bem como alguns mais avançados e um grande número de exercícios que reforçam os conceitos estudados os quais o leitor é incentivado a resolver usando softwares como o MATLAB/OCTAVE/SCILAB. O capítulo sobre equações hiperbólicas é particularmente notável.

O leitor encontra neste texto os ingredientes essenciais para um bom domínio da solução numérica de equações diferenciais. Ingredientes estes que poderão ser-lhe diretamente útil, seja no mundo profissional em aplicações práticas, seja no mundo acadêmico, pois estará bem equipado para desenvolver estudos mais avançados na área.

Os autores, na elaboração deste texto prestam um grande serviço para a comunidade lusófona. Nenhum outro livro com a mesma amplitude e cobrindo o mesmo assunto está disponível em Português. Este livro constitui um *tour de force*. Eu desejo que este volume tenha um amplo público no Brasil e quiçá em outros países lusofônicos.

Professor Sean McKee
Department of Mathematics and Statistics
Strathclyde University
Glasgow - Escócia

“...of making many books there is no end; and much study is a weariness of the flesh.” Ecclesiastes XII:12

Sumário

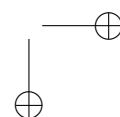
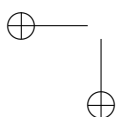
Apresentação	III
Prefácio	IX
1 Conceitos Fundamentais	1
1.1 Sinopse	1
1.2 Introdução	2
1.3 Aproximações de Derivadas por Diferenças Finitas	5
1.4 Problema de Valor Inicial em Equações Ordinárias	14
1.5 Problema de Valor de Fronteira para Equações Ordinárias	36
1.6 Exercícios	49
2 Introdução às Equações Diferenciais Parciais	59
2.1 Sinopse	59
2.2 Introdução	59
2.3 Classificação	63
2.4 Características	68
2.5 Discretização	71

2.6	Domínios Genéricos e Transformação de Variáveis	76
2.7	Exercícios	88
3	Equações Parabólicas	97
3.1	Sinopse	97
3.2	Introdução	98
3.3	Métodos de Diferenças Finitas	100
3.4	Problemas Não Lineares	129
3.5	Outros Métodos	134
3.6	Equações Parabólicas em Duas Dimensões	142
3.7	Exercícios	152
4	Equações Elípticas	163
4.1	Sinopse	163
4.2	Introdução	164
4.3	Métodos de Diferenças Finitas	166
4.4	Erro de Truncamento Local	172
4.5	Condições de Fronteira	179
4.6	Métodos Iterativos	190
4.7	Convergência	200
4.8	Método dos Gradientes Conjugados	208
4.9	Exercícios	218
5	Equações Hiperbólicas	227
5.1	Sinopse	227
5.2	Introdução	228
5.3	Equação Escalar de Advecção e da Onda	229
5.4	Diferenças Finitas para a Equação de Advecção	275
5.5	Diferenças Finitas para a Equação da Onda	297
5.6	Métodos Numéricos para Leis de Conservação	304
5.7	Exercícios	337

0.0 VII

Referências **351**

Índice Remissivo **360**



Prefácio

O universo de técnicas de solução numérica de equações diferenciais parciais é bastante variado e inclui, entre outros, os métodos de diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos, elementos de contorno, métodos espectrais e métodos de colocação. O objetivo deste texto é apresentar uma introdução à solução numérica de equações diferenciais parciais utilizando discretização por **diferenças finitas** com ênfase nos principais conceitos que são úteis para as aplicações. O conteúdo será desenvolvido por meio de modelos de equações parabólicas, elípticas e hiperbólicas. Pretende-se introduzir de maneira bastante natural os conceitos de estabilidade e convergência, dependência da discretização das condições de fronteira, condição CFL e método das características. Incluímos, sempre que possível, uma certa dose de teoria e rigor no tratamento desses conceitos sem no entanto relegarmos o lado experimental, especialmente o lado ilustrativo por meio de exemplos e gráficos. Nosso objetivo é o de apresentar uma variedade de técnicas de solução sobre as quais o leitor deverá adquirir conhecimentos teóricos e também experimental. Por essa razão é imprescindível que o leitor resolva os exercícios práticos, que envolvem programação. A

programação pode ser desenvolvida utilizando sistemas para cálculos matemáticos tais como, MATLAB, OCTAVE ou SCILAB. Quaisquer desses sistemas possuem as ferramentas adequadas para resolver os exercícios propostos. Alertamos que enquanto MATLAB é um produto comercial, que requer o pagamento da devida licença, os dois outros são disponibilizados sob licença de software livre e podem ser obtidos gratuitamente cumpridos os devidos registros.

Na literatura é bastante popular a ideia, especialmente em equações diferenciais parciais, de que existem tantos métodos numéricos quantos são os problemas a serem resolvidos. Em geral entretanto, alguns conceitos e técnicas fundamentais estão presentes em todos os métodos. O propósito deste texto é o de chamar a atenção para esses conceitos esclarecendo-os através da análise de exemplos. É quase sempre possível classificar um problema em quatro grandes tipos: Equações Parabólicas, Equações Elípticas, Equações Hiperbólicas e Problemas do tipo misto. Do ponto de vista didático esta divisão parece ser recomendada para melhor associação entre as técnicas numéricas e a natureza do problema a ser resolvido. O conteúdo aqui desenvolvido segue essa lógica.

Este livro foi escrito com o propósito de servir como texto básico complementar de disciplinas de cálculo numérico e matemática aplicada ministradas em cursos de graduação de engenharia, matemática e áreas afins em ciências exatas. O material mais avançado pode ainda servir para cursos introdutórios de pós-graduação nas áreas acima citadas. Para cumprir esse objetivo foi introduzido uma lista bastante completa de exercícios que envolve desde a fixação dos conceitos básicos até a implementação de projetos práticos em computador. A maioria dos métodos numéricos apresentados são passíveis de programação simples em um dos sistemas recomendados e podem ser utilizados pelo professor para ilustrar os conceitos ministrados em sala de aula. Os sistemas MATLAB, OCTAVE ou SCILAB incluem uma interface gráfica padronizada que permite a solução de problemas razoavel-

mente complexos sem a necessidade de um grande esforço de programação por parte do aluno. Isto viabiliza a utilização de exercícios práticos para a ilustração e reconhecimento de conceitos como convergência, estabilidade, precisão, etc.

O conteúdo foi dividido em 5 capítulos, os dois primeiros apresentando os conceitos básicos de discretização de problemas de valor inicial e de contorno para equações diferenciais ordinárias e a teoria elementar das equações diferenciais parciais. Nos outros três capítulos apresentamos separadamente as técnicas de discretização de cada um dos tipos de equações parabólicas, hiperbólicas e elípticas. Todos os capítulos incluem uma lista bastante extensa de exercícios, muitos dos quais abordam temas mais avançados do que aqueles tratados no texto. Essa atitude tem o propósito de estimular o aluno que pretende aprofundar-se nessa área do conhecimento a pesquisar as referências e aguçar sua curiosidade. No entanto, alertamos os professores que pretendem utilizar o texto como guia de um curso, para o fato de que uma seleção dos exercícios pode ser recomendada para não desestimular os estudantes com problemas muito difíceis. A ordem de apresentação dos exercícios não segue um critério de dificuldade crescente e sim a ordem dos tópicos no texto.

O material deste livro deriva em boa parte de cursos de graduação que os autores têm ministrado em suas respectivas unidades de ensino. Agradecimento especial nos é devido aos autores da apostila [MABB94], aos alunos do ICMC pela leitura dos originais e o apoio financeiro do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP São Carlos, Faculdade de Ciências e Tecnologia - UNESP Presidente Prudente e CNPq. Agradecimento especial é devido ao Professor Valdemir Garcia Ferreira pela sua contribuição à subseção Monotonicidade e Métodos de Alta Resolução TVD. Agradecemos também os revisores da SBM que leram meticolosamente os originais, fizeram inúmeras sugestões melhorando a qualidade do texto e eliminando muitos erros.

São Carlos, Abril de 2013

José Alberto Cuminato
Messias Meneguette Junior