FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

Fundamentos de Cálculo

 Impresso Fev. 2022

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

ISBN 978-85-8337-171-7

Muniz, Antonio Caminha

Fundamentos de cálculo / Antonio Caminha Muniz. – 2. ed. – Rio de Janeiro, RJ : SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

612 p. (Coleção Profmat; 15)

ISBN 978-85-8337-171-7

1. Cálculo diferencial 2. Cálculo integral 3. Matemática - Estudo e ensino I. Título.

Antonio Caminha Muniz Neto

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

2ª edição
2022
Rio de Janeiro

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

"Wir müssen wissen! Wir werden wissen!"

Precisamos saber! Haveremos de saber!

David Hilbert, em sua famosa palestra no II Congresso Internacional de Matemáticos, no ano de 1900, ao elencar os 23 problemas que, em sua opinião, norteariam o desenvolvimento da Matemática ao longo do século XX. Vários desses problemas têm suas raízes no Cálculo.

Apresentação

Os próximos capítulos apresentarão, em detalhe, os temas centrais concernentes a uma das maiores sínteses intelectuais da história da civilização, o Cálculo Diferencial e Integral.

Como frequentemente ocorre com as grandes ideias científicas, a cronologia do desenvolvimento do Cálculo revelou-se completamente errática, enredando-se na ordem exatamente contrária à que utilizaremos em nossa exposição. Após um incrível lampejo de genialidade de um dos maiores sábios da antiguidade clássica grega, foi necessário esperar cerca de 20 séculos até que dois outros luminares da ciência dessem o próximo passo; a esse, por sua vez, seguiu-se um século e meio de intensas pesquisas e maturação, após o qual o Cálculo pôde, finalmente, ser colocado em bases sólidas.

Mas, de que trata o Cálculo Diferencial e Integral? Nesta breve introdução, tentamos responder a essa pergunta apresentando, por meio de argumentos heurísticos, os dois conceitos que o nomeiam, quais sejam, a *integral* e a *derivada* de uma função. Em seguida, criticamos brevemente nossas abordagens de tais conceitos, enfatizando como as deficiências que elas encerram apontam para a necessidade de uma melhor compreensão do conceito de número real e da introdução do conceito de função contínua.

Nossa história começa no século III a.C., com o grande Arquimedes de Siracusa (figura 1). Por essa época, Euclides de Alexandria já havia sistematizado toda a geometria conhecida (à qual nos referimos modernamente como *Euclidiana*) em sua magistral obra *Elementos*. Arquimedes, então, considerou (e resolveu) o problema de calcular a área sob um arco de parábola, utilizando para tanto o *método da exaustão*.

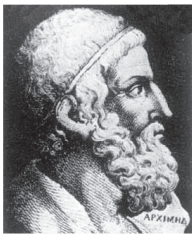

Figura 1: Arquimedes de Siracusa, que viveu no século III a.C., foi o maior matemático de seu tempo. Dentre outras contribuições à Matemática, suas ideias sobre o cálculo da área sob um segmento parabólico anteciparam, em 2000 anos, o desenvolvimento do Cálculo Integral.

Em linguagem atual e em uma situação ligeiramente mais geral, a heurística por trás de tal método é a seguinte: dada uma função não negativa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (figura 2), queremos calcular a área da região $\mathcal{R}$ do plano cartesiano, situada sob o gráfico de f e acima do eixo das abscissas, de sorte que

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b \text{ e } 0 \le y \le f(x)\}.$$

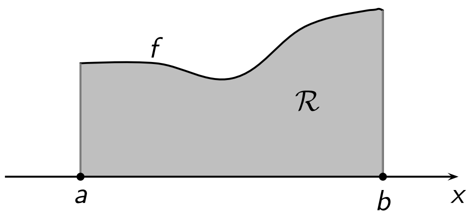

Figura 2: a região sob o gráfico de f.

Para tanto, dividimos o intervalo $[a, b]$ em k intervalos iguais com o auxílio dos pontos $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$, de tal modo que $t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{k}$, para $1 \le i \le k$. Em seguida (figura 3), consideramos a porção de $\mathcal{R}$ contida na faixa vertical delimitada pelas retas $x = t_{i-1}$ e $x = t_i$, e aproximamos sua área, por falta, pela área do maior retângulo nela contido e tendo o intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ como um de seus lados; aproximamos a área da porção em questão também por excesso, pela área do menor retângulo que a contém e que também tem o intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ como um de seus lados.

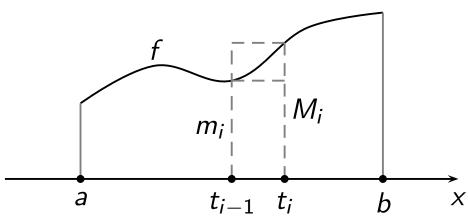

Figura 3: aproximações por falta e por excesso para a área.

Agora, aproximamos a área de $\mathcal{R}$ por falta e por excesso, calculando, em cada caso, as somas das áreas dos k retângulos descritos no parágrafo anterior e que aproximam a área de cada porção de $\mathcal{R}$ também por falta e por excesso, respectivamente. Assumindo que f atinge valores mínimo e máximo em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, e denotando (também respectivamente) por m_i e M_i tais valores mínimo e máximo (de modo que m_i e M_i sejam os comprimentos das alturas dos retângulos considerados anteriormente), obtemos como resultado as somas

$$\underline{A}(f;k) = \sum_{i=1}^{k} m_i(t_i - t_{i-1}) = \left(\frac{b-a}{k}\right)\sum_{i=1}^{k} m_i \tag{1}$$

e

$$\overline{A}(f;k) = \sum_{i=1}^{k} M_i(t_i - t_{i-1}) = \left(\frac{b-a}{k}\right)\sum_{i=1}^{k} M_i. \tag{2}$$

Sendo $A(\mathcal{R})$ a área de $\mathcal{R}$, temos, então, que

$$\underline{A}(f;k) \leq A(\mathcal{R}) \leq \overline{A}(f;k),$$

e esperamos que $\underline{A}(f;k)$ e $\overline{A}(f;k)$ aproximem $A(\mathcal{R})$ cada vez melhor, à medida que aumentamos mais e mais o número k de intervalos utilizados.

Conforme frisamos anteriormente, Arquimedes levou tal procedimento a cabo em um caso bem particular, qual seja, aquele em que f é a porção da parábola $x \mapsto x^2$ situada entre $a = 0$ e $b > 0$.

A fim de ilustrar as dificuldades envolvidas, consideremos a situação mais geral do emprego do método da exaustão para o cálculo da área de $\mathcal{R}$ quando $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = x^n$, onde n é um natural dado. Como antes, sendo $k \in \mathbb{N}$ e $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ a partição de $[0,b]$ tal que $t_i - t_{i-1} = \frac{b}{k}$ para $1 \leq i \leq k$, temos $t_i = \frac{bi}{k}$ para $0 \leq i \leq k$. Também, como $x \mapsto x^n$ é crescente, segue que $m_i = f(t_{i-1}) = t_{i-1}^n$ e $M_i = f(t_i) = t_i^n$. Assim,

$$\overline{A}(f;k) = \frac{b}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} t_i^n = \frac{b}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{bi}{k}\right)^n = \left(\frac{b}{k}\right)^{n+1} \sum_{i=1}^{k} i^n \tag{3}$$

e, analogamente,

$$\underline{A}(f;k) = \left(\frac{b}{k}\right)^{n+1} \sum_{i=1}^{k} (i-1)^n. \tag{4}$$

Segue facilmente daí que

$$\overline{A}(f;k) - \underline{A}(f;k) = \frac{b^{n+1}}{k}; \tag{5}$$

portanto, a diferença entre $\underline{A}(f;k)$ e $\overline{A}(f;k)$ é cada vez menor à medida que k aumenta e, pelo menos nesse caso, concluímos que $\underline{A}(f;k)$ e $\overline{A}(f;k)$ aproximam $A(\mathcal{R})$ cada vez melhor, à medida que k aumenta.

Para calcular o valor de $A(\mathcal{R})$, utilizemos o resultado do item (b) do exemplo A.33, o qual garante que

$$\sum_{i=1}^{k}(i-1)^n < \frac{(k-1)^{n+1}}{n+1} < \sum_{i=1}^{k} i^n.$$

Combinando tais desigualdades com (3) e (4), obtemos

$$\underline{A}(f;k) < \frac{b^{n+1}}{n+1}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n+1} < \overline{A}(f;k). \tag{6}$$

Então, fazendo k aumentar mais e mais em (6) e levando em conta que $1-\frac{1}{k}$ aproxima-se cada vez mais de 1 e $\overline{A}(f;k)-\underline{A}(f;k)$ fica cada vez mais próximo de 0 à medida que k aumenta (conforme (5)), concluímos que

$$A(\mathcal{R}) = \frac{b^{n+1}}{n+1}.$$

Conforme antecipamos no início desta introdução, o passo seguinte no desenvolvimento do Cálculo teve de esperar cerca de 2000 anos, mais precisamente até o final do século XVII, para ser dado. Isso não é de estranhar, se levarmos em conta a complexidade dos cálculos e notações que utilizamos até aqui, juntamente com o fato de que eles não estavam disponíveis a ninguém nesse interregno de dois milênios, simplesmente porque não existiam. De fato, o hiato entre o tempo de Arquimedes e o final do século XVII foi o tempo necessário para que a civilização desenvolvesse as notações e ferramentas algébricas e geométricas que possibilitaram os trabalhos seminais de nossas próximas duas personagens, *sir* Isaac Newton e Gottfried Wilhem Leibniz.

A fim de apreciar o grande passo adicional dado por Newton e Leibniz, consideremos o problema de encontrar a *reta tangente* ao gráfico de uma função $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ em um ponto $A(x_0, f(x_0))$ sobre tal gráfico (de modo que $x_0 \in (a,b)$). Para tanto, tomando $x_1 \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ e sendo $B_1(x_1, f(x_1))$, dizemos que a reta $\overleftrightarrow{AB_1}$ é uma *secante* ao gráfico de f passando por A. Na figura 6, consideramos as secantes $\overleftrightarrow{AB_1}$ e $\overleftrightarrow{AB_2}$ ao gráfico de f.

Figura 4: Gottfried Wilhem Leibniz (1646-1716), matemático e filósofo alemão, é considerado, juntamente com Isaac Newton, um dos criadores do Cálculo Diferencial e Integral. Algumas das notações que utilizamos até hoje no Cálculo foram criadas já por Leibniz, tendo resistido ao implacável teste do tempo.

Figura 5: o matemático e físico inglês Isaac Newton (1642-1727) é considerado um dos maiores cientistas que a humanidade já conheceu, sendo difícil mensurar sua contribuição para o desenvolvimento da ciência. Considerado o pai da Física moderna, Newton criou, juntamente com G. W. Leibniz, os fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral, pedra angular do desenvolvimento científico e tecnológico vivenciado desde sua época, no final do século XVII, até os dias de hoje. Sua obra-prima, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (em Português, *Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* – à época de Newton, a Física era conhecida como *Filosofia Natural*), é considerada por muitos o livro que mais influenciou o desenvolvimento da civilização ocidental, por conter os alicerces do Cálculo e da Física modernas.

Um pouco de intuição geométrica torna razoável supor que uma secante genérica $\overleftrightarrow{AB}$ deva aproximar-se cada vez mais da tangente ao gráfico de f em A, à medida que B se aproxima de A ao longo do gráfico (ou, o que é o mesmo, à medida que x se aproxima de x_0 em (a, b)).

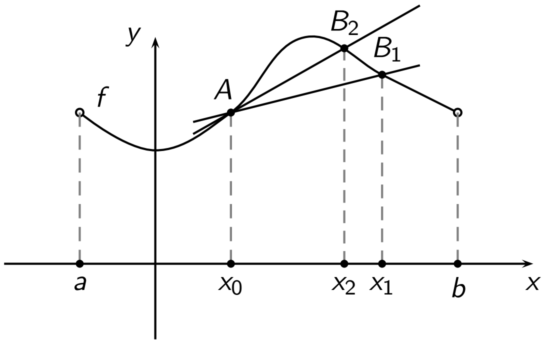

Figura 6: secantes $\overleftrightarrow{AB_1}$ e $\overleftrightarrow{AB_2}$ ao gráfico de f.

Observe que, se $x_1 \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ e $B(x_1, f(x_1))$, a secante $\overleftrightarrow{AB}$ ao gráfico de f é a reta de equação

$$y - f(x_0) = \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right)(x - x_0); \tag{7}$$

por outro lado, a reta tangente ao gráfico de f em A, se não for vertical, deve ter equação da forma

$$y - f(x_0) = m(x - x_0), \tag{8}$$

para algum $m \in \mathbb{R}$.

Comparando (7) e (8) e tendo em conta a discussão do parágrafo anterior, somos levados a concluir que os quocientes $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ devem aproximar m cada vez melhor à medida que x_1 aproxima x_0 cada vez melhor. Assim, concluímos que a reta tangente ao gráfico de f em A é a reta de equação (8), onde m é o *valor limite* dos quocientes $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$, à medida que x_1 se aproxima de x_0 mais e mais.

Modernamente, dizemos que tal *valor limite* dos quocientes $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$, à medida que x_1 se aproxima de x_0, é a *derivada* da função f em x_0, a qual denotamos por $f'(x_0)$ ou, na notação clássica de Leibniz, $\frac{df}{dx}(x_0)$. Assim, escrevendo x no lugar de x_1, concluímos que

$$\frac{df}{dx}(x_0) \cong \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

para $x - x_0$ pequeno, sendo a aproximação acima tanto melhor quanto mais próximo x estiver de x_0. Aqui, o símbolo $\frac{df}{dx}(x_0)$ recorda que a derivada de f em x_0 é obtida calculando-se quocientes de diferenças entre valores de f e da variável, calculados em x_0 e em x.

Retomemos, agora (e novamente em linguagem atual), o problema mais geral do cálculo da área da região sob o gráfico de uma função não negativa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (figura 7).

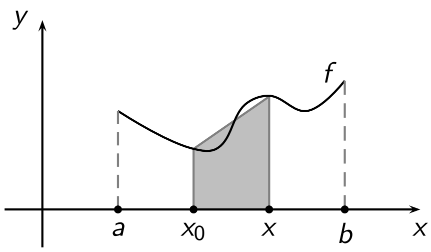

Figura 7: aproximando a área sob o gráfico de f.

Para cada real $x \in [a, b]$, denotemos por $A(x)$ a área da região situada sob o gráfico de f, acima do eixo das abscissas e entre as retas verticais de abscissas a e x (com a convenção de que $A(a) = 0$). Fixado $x_0 \in [a, b)$ e tomando $x_0 < x \leq b$, temos

$$A(x) - A(x_0) = A([x_0, x]), \tag{9}$$

onde $A([x_0, x])$ denota a área da porção da região em questão, situada entre as retas verticais de abscissas x_0 e x.

É razoável supor que, para x bem próximo de x_0, uma boa aproximação para $A([x_0, x])$ seja a área do trapézio com bases de comprimentos $f(x_0)$ e $f(x)$ e que tem o segmento $[x_0, x]$ como um de seus lados não paralelos (o trapézio hachurado, na figura 7). Ademais, também é razoável supor que tal aproximação seja tanto melhor quanto mais próximo x estiver de x_0, de maneira que

$$A([x_0, x]) \cong \left(\frac{f(x_0) + f(x)}{2}\right)(x - x_0), \tag{10}$$

para $x - x_0$ pequeno.

Combinando (9) e (10), concluímos que

$$\frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \cong \frac{f(x_0) + f(x)}{2},$$

para $x - x_0$ pequeno, sendo tal aproximação tanto melhor quanto mais próximo x estiver de x_0. Mas, se o gráfico de f for uma curva *contínua* (isto é, sem interrupções), então, à medida que x se aproxima mais e mais de x_0, esperamos que os valores $f(x)$ se aproximem mais e mais de $f(x_0)$, de forma que os quocientes $\frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0}$ fiquem cada vez mais próximos de $\frac{f(x_0)+f(x_0)}{2} = f(x_0)$. Em resumo, concluímos que, nesse caso, deve ser

$$\frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \cong f(x_0), \tag{11}$$

para $x - x_0$ pequeno, sendo tal aproximação tanto melhor quanto mais próximo x estiver de x_0.

Em palavras, o argumento heurístico acima garante que podemos reobter a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que define um gráfico *contínuo*, contanto que conheçamos a função $A : [a, b] \to \mathbb{R}$, tal que $A(x)$ calcula a área da região situada sob o gráfico de f, acima do eixo das abscissas e entre as retas de abscissas a a x.

No caso em que $f(x) = x^n$, por exemplo, vimos que $A(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, de forma que, para $x - x_0$ pequeno (e com o auxílio do problema A.2.1.5, página 420),

$$\begin{aligned}
\frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{x^{n+1} - x_0^{n+1}}{x - x_0}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\left(x^n + x^{n-1}x_0 + x^{n-2}x_0^2 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right) \\
&\cong \frac{1}{n+1}\left(x_0^n + x_0^{n-1}x_0 + x_0^{n-2}x_0^2 + \ldots + x_0x_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}(n+1)x_0^n = x_0^n = f(x_0).
\end{aligned}$$

Em linguagem moderna, dada a função não negativa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, cujo gráfico é uma curva contínua, dizemos que a função-área $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma *integral indefinida* para f, e denotamos

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{12}$$

Aqui, o símbolo $\int_a^x$ recorda o fato de que a área da porção sob o gráfico de f, de a a x, foi calculada com o auxílio de *somas* que aproximavam a área desejada cada vez melhor; o símbolo $f(t)dt$, por sua vez, recorda o fato de que as parcelas dessas somas tinham a forma $m_i(t_i - t_{i-1})$, onde m_i era o menor valor de f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ (logo, $m_i = f(t)$, para algum $t \in [t_{i-1}, t_i]$) e $t_i - t_{i-1} = \Delta t_i$ era a $i-$ésima diferença entre os pontos de divisão do intervalo $[a, b]$ (Leibniz utilizava sistematicamente a letra grega Δ para expressar diferenças finitas, notação que perdura até os dias de hoje).

Por outro lado, vimos acima que os quocientes $\frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0}$ aproximam-se mais e mais, à medida que x se aproxima de x_0, da derivada da função A em x_0:

$$\frac{dA}{dx}(x_0) \cong \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \tag{13}$$

para $x - x_0$ pequeno, sendo a aproximação tanto melhor quanto mais próximo x estiver de x_0.

Substituindo (12) no primeiro membro de (13), aproximando o segundo membro de (13) por (11) e transformando as aproximações em igualdades, obtemos

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \tag{14}$$

que é, essencialmente, o conteúdo do *Teorema Fundamental do Cálculo* e sugere que as operações de integração e derivação (interpretadas como cálculo da área sob um gráfico e da reta tangente ao gráfico em um de seus pontos) guardam uma relação íntima uma com a outra.

A apresentação que fizemos acima, das duas ideias centrais do Cálculo, careceu propositadamente de precisão, por pelo menos duas razões distintas.

Do ponto de vista pedagógico, o uso de argumentos heurísticos, ainda que imprecisos, possibilitou-nos apresentar os conceitos de integral e derivada com um mínimo de pré-requisitos. Por sua vez, uma tal apresentação, por fornecer ao leitor uma visão panorâmica mínima dos conteúdos que discutiremos, funcionará como fio condutor de boa parte do livro.

Do ponto de vista histórico, a imprecisão de nossos argumentos ilustra a imprecisão análoga, senão maior, dos raciocínios utilizados à época de Newton e Leibniz. De fato, por aquela época, mesmo o próprio conceito de função não estava bem estabelecido!

Em última análise, as dificuldades em formalizar os argumentos que delineamos residem na necessidade de abordagens adequadas dos conceitos de *completude* do conjunto dos números reais e de função *contínua* (capítulo 2) e de *limites* de funções (capítulo 3). Essas, por sua vez, foram gestadas ao longo de todo o século XIX e do primeiro terço do século XX, graças principalmente aos esforços de Cauchy, Weierstrass, Cantor e seus discípulos.

Nesse interregno, o conceito de integral também ganhou contornos bem definidos, inicialmente com os trabalhos de B. Riemann, os quais foram posteriormente estendidos, por H. Lebesgue, a um contexto mais geral.

Figura 8: Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), um dos maiores matemáticos do século XIX, e talvez da História. Cauchy foi um dos precursores no estudo da Análise Matemática, área de pesquisa extremamente importante em matemática superior. Ele também tem seu nome associado a muitos resultados de Física-Matemática.

Figura 9: quando olhamos para o legado do matemático alemão Bernhard Riemann (1826-1866) à Geometria, concluímos que talvez a menor de suas contribuições à Matemática tenha sido uma formalização adequada do conceito de integral que, hoje, leva seu nome. (Conforme o leitor atento deve ter notado, o Capítulo 6 é intitulado *A Integral de Riemann*.) Outra das criações de Riemann, a geometria hoje conhecida como riemanniana, forneceu a A. Einstein o arcabouço teórico adequado ao desenvolvimento da teoria da relatividade geral.

Este livro tem o duplo propósito de colocar os conceitos de derivada e integral em bases sólidas e fazer jus às motivações históricas para o desenvolvimento do Cálculo, apresentando várias aplicações interessantes do mesmo à Física e à Geometria.

Desde sua criação, a grande razão para o sucesso do Cálculo como corpo de conhecimento tem sido sua aplicabilidade a um sem-número de problemas de vários ramos do conhecimento. De fato, o próprio *Principia*[1], publicado em 1687, deixa claro que a grande motivação de Newton para a desenvolvimento dos métodos do Cálculo residiu nas aplicações dos mesmos à Física.

Após Newton e Leibniz, o século XVIII presenciou uma miríade de aplicações e extensões dos métodos do Cálculo, capitaneada pelos igualmente geniais L. Euler e J. L. Lagrange.

Figura 10: o suíço Leonhard Euler (1707-1783) é, até hoje, considerado o matemático que mais publicou trabalhos relevantes. Suas contribuições variam, impressionantemente, da Geometria à Combinatória, passando pela Teoria dos Números e Física. Em cada uma dessas áreas do conhecimento há pelo menos um celebrado *teorema de Euler*.

Figura 11: Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), matemático e físico francês. Lagrange foi um dos maiores cientistas de sua época, dando contribuições notáveis ao Cálculo das Variações e à Mecânica Celeste.

Hoje, olhando em retrospecto, é difícil subestimar o papel do Cálculo para o desenvolvimento científico e tecnológico da sociedade moderna. Suas ideias e resultados mostraram-se e continuam sendo fundamentais ao desenvolvimento de

[1]Alcunha do *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, obra prima de Newton.

áreas tão díspares quanto Física, Economia, Computação e Biologia, para não falar de aplicações, diretas ou indiretas, às várias engenharias.

Folheando as páginas desta introdução, é quase irresistível parafrasear *sir* Isaac Newton para concluir que, se há tamanha pervasividade do Cálculo no mundo moderno, é porque sua criação e desenvolvimento apoiaram-se *em ombros de gigantes*.

Sumário

Prefácio

Prefácio à Primeira Edição

Este volume apresenta ao leitor uma exposição dos aspectos mais básicos de uma das maiores sínteses intelectuais da história da humanidade, o Cálculo Diferencial e Integral. Em que pese o consenso de que sua construção deu-se graças ao trabalho de duas das maiores mentes de nossa civilização, o matemático e filósofo Gottfried Wilhelm Leibniz e o físico e matemático Isaac Newton, faz-se mister ressaltar, parafraseando o próprio Newton[2], que tal só foi possível porque ambos *apoiaram-se sobre os ombros de gigantes* como Arquimedes, Euclides, Viète, Galileu, Descartes e Fermat, dentre outros. Por outro lado, observando em retrospecto, hoje vê-se o Cálculo alicerçar tão numerosas e diversas aplicações e desenvolvimentos científicos e tecnológicos, que a simples tarefa de traçar um panorama abrangente dos mesmos, mais que difícil, é virtualmente impossível. Aqui, contentar-me-ei em observar que a modelagem de um sem-número de fenômenos biológicos, físicos ou químicos, assim como processos econômicos ou de engenharia, utiliza o conceito de taxa de variação, o qual já era considerado central pelos pais fundadores do Cálculo; por sua vez, o resultado de tais modelagens é, o mais das vezes, um problema concernente à teoria de equações diferenciais, cuja solução repousa, novamente, nos métodos do Cálculo e de sua irmã caçula, a Análise Matemática.

Em que pese a narrativa do parágrafo anterior, é perfeitamente lícito o leitor questionar o porquê de mais um livro de Cálculo, após a publicação de tantos outros ao longo dos últimos 300 anos. Nesse sentido, a mim me parece que a quase totalidade dos textos modernos sobre Cálculo Diferencial e Integral preocupa-se excessivamente em conformar-se à estrutura segmentada de disciplinas de Matemática dos ciclos básicos das universidades. Assim é que um estudante pode cursar todo um ano de Cálculo e, ao final, não ser capaz de explicar rapidamente de que trata o assunto, bem como não perceber adequadamente o papel central desempenhado pelas modelagens de situações físicas e pelo estudo das equações diferenciais delas resultantes. Contrariamente a essa tendência, este livro procura, a um só tempo, apresentar de forma clara e sucinta as ideias centrais do Cálculo, ofertar um desenvolvimento rigoroso das mesmas e discutir cuidadosamente uma grande quantidade de aplicações não triviais dessas ideias. Sendo um pouco mais específico, a introdução, sob o título *De que Trata o Cálculo*, discute heuristicamente as noções de área sob um gráfico e reta tangente a um gráfico em um ponto, bem como sugere a ponte entre ambas, fornecida pelo teorema fundamental do Cálculo; nela é também observada que, subjacentes a tais conceitos, repousam duas noções distintas

[2]É lamentável, contudo, que Newton tenha usado essa bela expressão ironicamente, em uma carta a seu rival Robert Hooke, 5 de fevereiro de 1676. Aqui, a utilizamos no nobre sentido em que foi inicialmente pensada e escrita por Bernard de Chartres. Nesse sentido, veja, por exemplo, `https://en.wikipedia.org/wiki/Standing_on_the_shoulders_of_giants`.

de limite, as quais guardam uma relação profunda entre si. Após uma apresentação cuidadosa, no capítulo 1, da teoria básica de funções, os capítulos 2 e 3 põem os conceitos de limite e continuidade de funções em bases sólidas e, a partir daí, desenvolvem uma série de ferramentas técnicas importantes para o restante do livro, centradas no conceito de derivada. O capítulo 4 discute pormenorizadamente a integral de Riemann, culminando com a apresentação do teorema fundamental do Cálculo e de uma série de aplicações interessantes, dentre as quais destacamos uma prova da irracionalidade de π. O livro termina com o capítulo 5, o qual é dedicado ao estudo das séries de números reais e de funções. As três últimas seções do capítulo 3, bem como as seções 4.5, 4.9 e 5.6, discutem as mais variadas aplicações das ferramentas desenvolvidas à Álgebra, Combinatória, Física e Geometria, sem se furtar de discutir cuidadosamente as heurísticas física e geométrica necessárias e apresentando uma introdução bastante razoável ao estudo das equações diferenciais ordinárias.

Tendo em vista o que foi dito até aqui, fica clara, para a formação dos professores de Matemática do ciclo básico de ensino, a importância de um domínio minimamente adequado dos conceitos e resultados do Cálculo, bem como de suas aplicações mais simples. Tal importância é reforçada pelo fato de que os conteúdos e métodos mais elementares do Cálculo, por aplicarem, sintetizarem e expandirem o currículo de Matemática do ensino básico, ofertam um fechamento natural ao mesmo. Portanto, uma vez terminada a leitura deste livro, exorto os colegas professores de Matemática da escola básica, e que compõem o corpo discente do Profmat, a resgatarem o Cálculo para suas salas de aula, trazendo mais organicidade aos currículos que lecionam. Para tanto, sugiro fortemente a utilização de uma versão destilada do capítulo introdutório deste livro, bem como a referência [28] e, de maneira um tanto mais ambiciosa, a obra [32].

Ainda em relação à estruturação do texto, em vários pontos deixei a cargo do leitor a tarefa de verificar aspectos não centrais aos desenvolvimentos principais, quer na forma de pequenos detalhes omitidos em demonstrações, quer na de extensões da teoria. Nestes casos, frequentemente referi o leitor a problemas específicos, os quais se encontram marcados com * e cuja análise e solução considero parte integrante e essencial do texto. Em cada seção, colecionei outros tantos problemas, escolhidos na intenção de exercitar os resultados principais. Ainda que muitos dentre esses sejam aplicações diretas dos métodos e exemplos apresentados, outros tantos são bem menos simples, mas recompensam quem sobre eles se debruça com a beleza dos resultados que encerram. Mesmo que não os resolva todos, insto o leitor a pensar neles por tempo suficiente para passar a apreciá-los como corpo de conhecimento adquirido. Observo, por fim, que o apêndice A compila praticamente todos os pré-requisitos necessários à leitura, ao passo que o apêndice B traz sugestões generosas, ou soluções completas, para praticamente todos os problemas propostos.

Como não poderia deixar de ser, gostaria de concluir este prefácio agradecendo brevemente às pessoas e instituições que, pelos apoios a mim dispensados, ajudaram a materializar o livro. Ao longo do primeiro semestre de 2014, meu colega Marcos Ferreira de Melo utilizou a referência [10] para ministrar a disciplina de Fundamentos de Cálculo na turma do Profmat na UFC; o retorno fortemente positivo dele e dos alunos foi de fundamental importância para que eu decidisse enveredar pela confecção desta obra. Uma porção importante das anotações que geraram a versão final do livro foi gestada ao longo dos meses de janeiro e fevereiro de 2015, motivada pela preparação das aulas da disciplina Introdução à Análise, ministrada por mim no âmbito da Escola de Verão do Departamento de Matemática da UFC; os alunos que atenderam o curso, por seus questionamentos instigantes e curiosidade contínua, têm sua marca neste livro. Durante o primeiro semestre letivo de 2015, uma versão razoavelmente acabada do livro foi utilizada na disciplina Fundamentos de Cálculo do Profmat, desta feita pelos professores Hilário Alencar, na Ufal, Marcelo Viana, no Impa, e Liane Soares, na UFPI; os comentários, críticas e correções que eles me passaram certamente tornaram o resultado final muito melhor. Agradeço também ao professor Hilário Alencar, na qualidade de Editor-Chefe da SBM, pelo incentivo permanente aos meus arroubos de escritor. Ainda ao longo do primeiro semestre deste ano, meu colega Abdênago Barros leu várias partes do livro, catalogando muitas imprecisões e sugerindo outras tantas melhorias. O apoio financeiro do CNPq, bem como o ambiente de trabalho propício ofertado pela UFC, foram fundamentais para que eu desfrutasse da tranquilidade imprescindível à composição do livro. Finalmente, as incongruências que porventura tenham resistido a todo o escrutínio prévio à publicação constituem ônus que recai somente sobre mim.

FORTALEZA, JUNHO de 2015

Antonio Caminha M. Neto

Prefácio à Segunda Edição

Para esta segunda edição, fiz uma extensa revisão do texto, ao longo da qual implementei uma série de correções, abrangendo o uso da língua portuguesa, a formatação do texto, o emprego do LaTeX e os aspectos matemáticos envolvidos.

Em especial, no que concerne à Matemática, revisei os enunciados e soluções da maior parte dos exercícios e adicionei outros tantos; em especial, o problema 5.6.9, página 397, estende a discussão do texto, estabelecendo a existência e unicidade de soluções analíticas de EDO lineares de segunda ordem com coeficientes analíticos. Introduzi, ainda, uma breve discussão sobre enumerabilidade, culminando com uma demonstração da não enumerabilidade de $\mathbb{R}$, uma simplificação importante na demonstração do teorema binomial 5.56.

Adicionalmente aos comentários acima, aproveito para agradecer a excelente acolhida da primeira edição e, em especial, a todos os leitores que apontaram imprecisões ou incorreções ao texto.

FORTALEZA, JUNHO de 2021

Antonio Caminha M. Neto