

MATEMÁTICA DISCRETA

Matemática Discreta

Copyright ©2021-2013 Augusto César Morgado. Paulo Cezar Pinto Carvalho.

Direitos reservados pela Sociedade Brasileira de Matemática.

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98). Impresso Fev. 2021

Sociedade Brasileira de Matemática

Presidente: Paolo Piccione

Vice-Presidente: Jaqueline Godoy Mesquita

Diretores: Walcy Santos

Jorge Herbert Soares de Lira

Daniel Gonçalves

Roberto Imbuzeiro

Editor Executivo

Hilário Alencar

Assessor Editorial

Tiago Costa Rocha

Coleção PROFMAT

Comitê Editorial da Coleção PROFMAT

Hilário Alencar (Editor-Chefe)

Marcela Souza (Editora-Adjunta)

Mariana Cassol

Paulo Leandro Dattori

Vanderlei Horita

Projeto gráfico e capa

Pablo Diego Regino

Editoração Eletrônica

Dania González Morales

Distribuição e vendas

Sociedade Brasileira de Matemática

Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro RJ

Telefones: (21) 2529-5073

<http://www.sbm.org.br> / [email:lojavirtual@sbm.org.br](mailto:lojavirtual@sbm.org.br)

ISBN 978-85-8337-178-6

MORGADO, Augusto César

Matemática Discreta / Paulo César Pinto Carvalho.— 3. ed.—
Rio de Janeiro, RJ : Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

310p. (Coleção Profmat; 12)

ISBN 978-85-8337-178-6

1. Números Naturais 2. Método de indução 3. Progressões I.
Pinto Carvalho, Paulo César II. Título.

Augusto César Morgado
Paulo Cezar Pinto Carvalho

MATEMÁTICA DISCRETA

3ª edição
2022
Rio de Janeiro

 **SBM**
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA



Sumário

Prefácio	vii
1 Números Naturais	1
1.1 Introdução	2
1.2 Números Ordinais	2
1.3 Adição, multiplicação e ordem	6
Exercícios	8
1.4 Números Naturais e Contagem	9
Exercícios	12
2 O Método da Indução	15
2.1 Introdução	16
2.2 Definições por indução ou recorrência	16
2.3 Demonstrando igualdades	18
2.4 Demonstrando desigualdades	19
2.5 Aplicações em Aritmética	21
2.6 Resolvendo problemas com o método da indução	22
Exercícios	25
2.7 Outras formas do Princípio da Indução	27
Exercícios	32
3 Progressões	35
3.1 Progressões Aritméticas	36
3.2 Termo geral de uma Progressão Aritmética	36
3.3 Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética	40
3.4 Progressões Aritméticas de Ordem Superior	42
3.5 Somas Polinomiais	46
Exercícios	49
3.6 Progressões Geométricas	54
3.7 Termo Geral de um Progressão Geométrica	57
3.8 A Fórmula das Taxas Equivalentes	59
3.9 A Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica	60
Exercícios	63
4 Recorrências	75

Sumário

4.1	Introdução	76
	Exercícios	78
4.2	Recorrências Lineares de Primeira Ordem	78
	Exercícios	83
4.3	Recorrências Lineares de Segunda Ordem	84
	Exercícios	92
5	Matemática Financeira	95
5.1	Introdução	96
5.2	Juros Compostos	96
5.3	A Fórmula das Taxas Equivalentes	101
5.4	Séries uniformes	102
	Exercícios	106
5.5	Sistemas de Amortização	110
	Exercícios	115
6	Análise Combinatória	117
6.1	O Princípio Fundamental da Contagem	118
	Exercícios	121
6.2	Permutações e Combinações	123
	Exercícios	126
6.3	Outras fórmulas combinatórias	131
	Exercícios	133
6.4	O Triângulo Aritmético	133
6.5	O Binômio de Newton	135
	Exercícios	136
6.6	Revisão	138
	Exercícios	139
7	Probabilidade	145
7.1	Conceitos Básicos	146
	Exercícios	152
7.2	Probabilidade Condicional	157
	Exercícios	163
7.3	Espaço amostral infinito	167
	Exercícios	170
8	Médias e Princípio das Gavetas	171
8.1	Médias	172
	Exercícios	179
8.2	A Desigualdade das Médias	184
	Exercícios	187
9	Soluções dos Exercícios	191
	Bibliografia	305
	Índice Remissivo	307

Prefácio



Prefácio

Este livro é baseado, principalmente, nos capítulos escritos por Augusto César Morgado para o volume 2 de *A Matemática do Ensino Médio*, publicado pela Coleção do Professor de Matemática da SBM. O principal acréscimo foi a inclusão dos capítulos relativos ao conjunto dos números naturais e ao Princípio da Indução Finita, com o duplo propósito de fornecer a base teórica apropriada para o assunto e atender à ementa da disciplina MA12 - Matemática Discreta do Profmat.

Na revisão do material anteriormente publicado, a maior dúvida foi sobre como proceder com relação ao capítulo de Matemática Financeira, escrito em uma época em que o Brasil vivia uma realidade bem diferente da atual, em que taxas de juros anuais da ordem de 50% eram comuns. Inicialmente, considerei reescrever o capítulo, substituindo os exemplos por situações mais atuais. Prefiri, no entanto, na maior parte dos casos, preservar a memória da obra inicial, que reflete o humor e a personalidade de Morgado, acrescentando notas explicativas sempre que a situação descrita não corresponda à realidade atual.

Ao longo de todo o livro, foram acrescentados novos exercícios, muitos deles provenientes de exames de Acesso e Qualificação do Profmat, de avaliações anteriores da disciplina MA12 e de provas da Obmep. Em particular, o capítulo de Combinatória ganhou uma seção de revisão, para permitir ao leitor exercitar-se no assunto, sem que a técnica a ser usada seja sugerida pelo tópico sendo estudado. Também foi acrescentada, no capítulo sobre Probabilidade, uma introdução ao conceito de valor esperado. Na segunda edição, foram incluídas as soluções de todos os exercícios.

Gostaria de expressar meus agradecimentos a Sheila Zani, pela permissão para usar e adaptar o material original do Prof. Morgado, a Patricia Fontenelle, pelo auxílio na revisão do capítulo sobre Matemática Financeira, e a Fábio Henrique Teixeira de Souza, que apontou diversas correções a serem feitas no texto.

Rio de Janeiro, janeiro de 2015.

Paulo Cezar Pinto Carvalho

Instituto de Matemática Pura e Aplicada - Impa e
Escola de Matemática Aplicada - EMAP/FGV