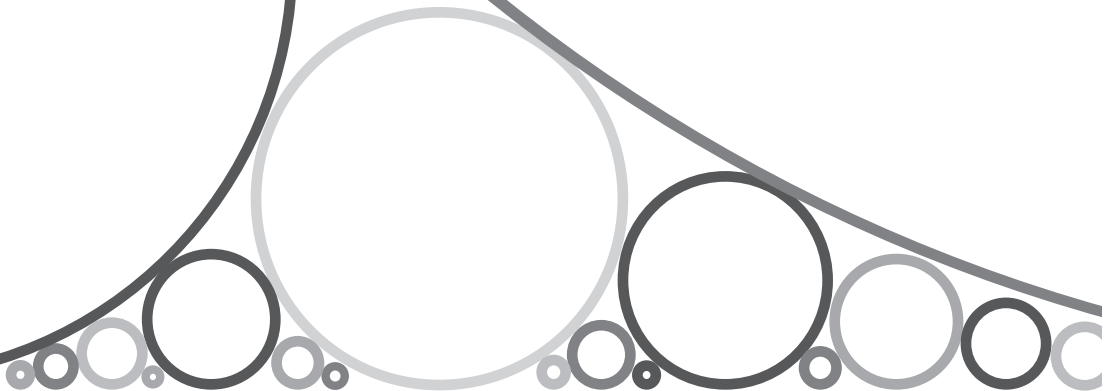


Coleção Olimpíadas de Matemática

Belos Problemas de Matemática Discreta

Rogério Ricardo Steffenon
Felipe Milan Guarnieri

1ª edição
2022
Rio de Janeiro





COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E. L. Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E. L. Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E. L. Lima
- *Coordenadas no Plano com as soluções dos exercícios* - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E. L. Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
- *Construções Geométricas* - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P. C. P. Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J. L. M. Barbosa
- *Isometrias* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Matemática e Ensino* - E. L. Lima
- *Temas e Problemas* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A. Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 4 - Exercícios e Soluções* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções* - S. Lima Netto
- *Um Convite à Matemática* - D.C de Moraes Filho
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 1 - Números Reais* - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana* - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 3 - Introdução à Análise* - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 4 - Combinatória* - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 5 - Teoria dos Números* - A. Caminha

Agradecimentos

Agradecemos a contribuição de Thomás Jung Spier e Valentino Amadeus Sichinel, que sugeriram problemas e algumas soluções, o professor Claus Ivo Doering por diversas dicas na elaboração do texto. Também agradecemos ao editor executivo, professor Hilário Alencar, pelo incentivo em transformar esse texto em livro e ao Tiago Rocha, assistente editorial da SBM, pela presteza, cordialidade e profissionalismo.

Dedico este livro à minha esposa Carla e aos meus filhos Guilherme e Jaqueline.
– Rogério R. S.

Agradeço aos meus pais que sempre me deram todo o suporte que precisei. Eu percebo cada vez mais a dificuldade e grandiosidade disso. Ainda, agradeço ao Prof. Rogério pelo direcionamento e oportunidades que tem me dado desde que nos conhecemos.
– Felipe M. G.

“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta.”

— Carl Friedrich Gauß

Sumário

Prefácio

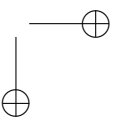
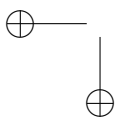
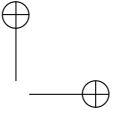
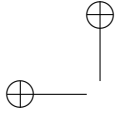
1	Princípio de Indução Matemática	1
1.1	Indução – Primeiros Passos	1
1.1.1	Conceitos Básicos e Exemplos	2
1.1.2	O Teorema Fundamental da Aritmética	8
1.1.3	Sistema Binário	13
1.1.4	Desigualdades	16
1.1.5	Exercícios	24
1.2	Miscelânea de Belos Problemas com Indução	36
1.2.1	A Sequência de Fibonacci	36
1.2.2	Cobertura de tabuleiro de damas com L-triminós	40
1.2.3	Pesagens de Moedas	41
1.2.4	O Problema de Josephus	42
1.2.5	Exercícios	44
2	Equações de Recorrência	49
2.1	Equações de Recorrência Lineares de Primeira Ordem	51
2.1.1	Progressão Aritmética	52
2.1.2	Teoremas de Somação	55
2.1.3	Progressão Geométrica	59
2.1.4	A solução geral das Equações de Recorrência Lineares de Primeira Ordem	72

SUMÁRIO

2.2	Equações de Recorrência de Segunda Ordem Homogêneas com Coeficientes Constantes	79
2.3	Equações de Recorrência Lineares de Ordem Superior com Coeficientes Constantes	88
2.4	Exercícios	93
3	Contagem	107
3.1	Conceitos Básicos	107
3.1.1	Princípios Aditivo e Multiplicativo	107
3.1.2	Permutações	109
3.1.3	Combinações Simples	113
3.1.4	Combinações Completas	115
3.1.5	Exercícios	118
3.2	Binômio de Newton e Contagem Dupla	123
3.2.1	Exercícios	128
4	O Princípio das Gavetas de Dirichlet	133
4.1	O Princípio das Gavetas de Dirichlet - PGD	133
4.2	Exercícios	144
5	Miscelâneas	153
5.1	Frações egípcias	153
5.2	Teorema de Pick	156
5.3	Jogos de subtração com palitos	168
5.4	Exercícios	175
6	Dicas, Respostas e Soluções	179
6.1	Princípio de Indução Matemática	179
6.1.1	Indução – Primeiros Passos	179
6.1.2	Miscelânea de Belos Problemas com Indução	205
6.2	Equações de Recorrência	215
6.3	Contagem	227

SUMÁRIO

6.3.1	Conceitos Básicos	227
6.3.2	O Binômio de Newton e Contagem Dupla	236
6.4	O Princípio das Gavetas de Dirichlet	242
6.5	Miscelâneas	266
	Referências	271
	Índice Remissivo	275



Prefácio

Este livro foi uma construção que se iniciou na III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) em 2006, seguiu pelas diversas Bienais posteriores e finalizou em um minicurso para o IV Colóquio de Matemática da Região Sul em 2016, também promovido pela Sociedade Brasileira de Matemática. A ideia do minicurso foi de apresentar para alunos de graduação e de pós-graduação alguns temas que complementassem a sua formação, além de mostrar alguns belos problemas matemáticos. Este livro tem o mesmo objetivo, além de ser um material de apoio ao treinamento olímpico.

A ideia é apresentar alguns conceitos e propor aos leitores uma grande variedade de exercícios, alguns deles originados em competições matemáticas.

O assunto do primeiro capítulo é a indução matemática, que pode ser usada para provar resultados envolvendo os números naturais. Apresentamos aspectos básicos da indução, algumas desigualdades importantes, o Teorema Fundamental da Aritmética, a Sequência de Fibonacci, o Problema de Josephus, as Pesagens de Moedas e diversos outros problemas.

No segundo capítulo tratamos das equações de recorrência lineares de primeira e segunda ordens e diversas situações e conteúdos que podem ser modelados através deste tema, como progressões aritméticas e geométricas, medições de fractais, contagem de blocos e outros problemas interessantes.

Prefácio

No terceiro capítulo abordamos os aspectos básicos da contagem, como princípios aditivo e multiplicativo, permutações simples, com repetição e circulares, combinações simples e completas. Um outro tópico muito interessante é a parte de demonstração combinatória e contagem dupla.

O quarto capítulo é dedicado a um dos tópicos mais fascinantes da Matemática: o Princípio das Gavetas de Dirichlet. Apesar de muito simples de enunciar e entender, são diversos os belos problemas que podem ser resolvidos usando essa técnica de demonstração de existência.

O quinto capítulo é um recorte de assuntos que originalmente eram tratados nos outros capítulos, mas que achamos que mereciam ser mencionados a parte.

E finalmente, o sexto capítulo contém praticamente todas as soluções dos exercícios apresentados durante os capítulos anteriores. Sugere-se que este capítulo seja utilizado para a comparação de respostas. Alguns exercícios são significativamente mais difíceis que outros, mesmo assim é importante tentar resolvê-los antes de espiar a solução, pois como dizia George Pólya, “Não se pode fazer Matemática sem sujar as mãos”.

São Leopoldo, 04 de agosto de 2021.

Rogério Ricardo Steffenon
Felipe Milan Guarneri

Prefácio

SIGLAS DO TEXTO

IMC – International Mathematics Competition for University Students –
<http://imc-math.org/>

IMO – International Mathematical Olympiad – <http://www.imo-official.org/>

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio – <https://enem.inep.gov.br/>

OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática – <http://www.obm.org.br/>

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas –
<http://http://www.obmep.org.br/>

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –
<http://www.profmatsbm.org.br/>

Putnam – William Lowell Putnam Mathematical Competition –
<http://kskedlaya.org/putnam-archive/>