

Sumário

Prefácio

Notações

1 Uma Breve História Transcendente **1**

Parte I: Irracionalidade

2 Frações Contínuas, Eisenstein e $\sqrt{2}$	7
2.1 Um resultado fundamental	7
2.2 Frações contínuas e irracionalidade	8
2.3 O critério de Eisenstein	14
2.4 Irracionalidade de $\sqrt{2}$	16
2.4.1 Frações irredutíveis	16
2.4.2 Teorema fundamental da aritmética	17
2.4.3 Frações contínuas	17
2.4.4 Princípio da boa ordenação	18
2.4.5 A prova geométrica	18
2.4.6 Eisenstein	19
2.4.7 Equações de Pell	20
2.4.8 Uma medida de irracionalidade	22
2.5 Fatos	23
2.6 Problemas	24
3 A Função Exponencial, Séries de Cantor e o Teorema de Apéry	29
3.1 Irracionalidade de e	29

3.1.1	A série de Taylor de e	30
3.1.2	Séries alternadas	30
3.1.3	Frações contínuas	32
3.1.4	A prova geométrica	34
3.1.5	Uma medida de irracionalidade	36
3.2	e não é quadrático	37
3.3	Séries de Cantor	38
3.4	O método de Hermite	42
3.4.1	e^r é irracional, se $r \in \mathbb{Q}^*$	44
3.4.2	π é irracional	45
3.5	Apéry e a irracionalidade de $\zeta(3)$	46
3.6	Fatos	55
3.7	Problemas	60

Parte II: Transcendência

4	Números Algébricos e Transcendentes	65
4.1	Números algébricos e transcendentos	65
4.2	Caracterização de algébricos via extensão de corpos	67
4.3	Propriedades aritméticas e analíticas de $\overline{\mathbb{Q}}$	70
4.4	Mais resultados sobre extensões algébricas	71
4.5	Fatos	78
4.6	Problemas	78
5	O Teorema de Liouville: Os Primeiros Números Transcendentes	81
5.1	O teorema de Liouville	81
5.2	Os números de Liouville	82
5.3	Fatos	87
5.4	Problemas	88
6	A Classificação de Mahler	91
6.1	Generalizando os teoremas de Liouville e Dirichlet	91
6.2	A classificação de Mahler	100

SUMÁRIO

6.3	A classificação de Koksma	102
6.4	Fatos	104
6.5	Problemas	105
7	O Teorema de Hermite-Lindemann	107
7.1	O teorema e alguns transcendentos	107
7.2	Quadratura do círculo	109
7.3	Transcendência de $\zeta(2n)$	110
7.4	Transcendência de séries fatoriais	113
7.5	Fatos	116
7.6	Problemas	117
8	O Teorema de Gelfond-Schneider	119
8.1	O teorema e algumas consequências	119
8.2	Números algébricos como potências de transcendentos	121
8.3	Fatos	123
8.4	Problemas	124
9	O Teorema de Baker	127
9.1	O teorema e algumas consequências	127
9.2	Formas lineares em logaritmos <i>à la</i> Baker	130
9.3	Fatos	135
9.4	Problemas	136
10	A Conjectura de Schanuel	137
10.1	A conjectura e suas consequências	137
10.2	O problema de Lang: independência algébrica em extensões transcendentes	140
10.2.1	Corpos linearmente disjuntos e livres	141
10.2.2	Solução do problema	144
10.3	Fatos	150
10.4	Problemas	152

11 Sugestões para os Problemas	155
Parte III: Apêndices	
A Prova do Teorema de Hermite-Lindemann	165
A.1 Preliminares	165
A.2 O teorema de Lindemann	170
B Prova do Teorema de Gelfond-Schneider	177
B.1 Preliminares	177
B.2 O teorema e sua demonstração	182
C Prova do Teorema de Baker	191
C.1 Notações e preliminares	191
C.2 O teorema de Baker	193
Referências	213
Índice Remissivo	221