

Sumário

Prefácio	xi
1 As notações matemáticas	1
1.1 Para que servem as notações matemáticas?	2
1.2 Algumas notações mais utilizadas	4
1.3 Alguns fatos sobre as notações	6
1.3.1 O alfabeto grego	6
1.3.2 Fatos importantes sobre o uso de certas notações	7
1.3.3 *Como representar o infinito	9
1.3.4 A diferença entre expressões indeterminadas e expressões impossíveis	10
1.3.5 *Curiosidades sobre o número π	13
1.4 *Uma viagem pelas notações do passado	15
1.4.1 Curiosidade: como surgiu o símbolo de igualdade	16
1.4.2 Outros episódios da história das notações	17
1.5 Problemas envolvendo raciocínio lógico - I	19
2 Como se expressa um fato matemático: um pouco de Lógica	21
2.1 Sentenças, sentenças abertas e quantificadores	21
2.1.1 Os quantificadores universal e existencial	25
2.1.2 A linguagem de conjuntos e a Lógica	27
2.1.3 *Curiosidade: os paradoxos lógicos	33
2.2 Conectivos e proposições compostas (O Cálculo Proposicional) . .	36
2.3 Problemas envolvendo raciocínio lógico - II	41
3 Mais um pouco de Lógica Matemática	43
3.1 Tabelas-verdade	43

3.2	Sentenças equivalentes na Lógica Formal	44
3.2.1	**Sentenças condicionais e implicativas na Lógica Formal	45
3.3	Argumentos	49
4	Sentenças condicionais e implicativas. Condições necessárias e suficientes	53
4.1	Sentenças condicionais	53
4.2	Sentenças implicativas	57
4.3	Sentenças condicionais, implicativas e a linguagem de conjuntos	58
4.4	*Curiosidade: a verdade das premissas	61
4.5	Duas notações que se costumam confundir	62
4.6	Condição necessária e condição suficiente	64
5	Se vale a ida, vale a volta? A recíproca de uma sentença	69
5.1	A recíproca de uma sentença	69
5.2	Sentenças equivalentes	71
5.2.1	A importância da equivalência de sentenças	73
5.3	Um exemplo de como usar a recíproca de uma sentença	74
5.4	**A bicondicional	78
6	Desvendando os teoremas - Parte I	79
6.1	O que é um teorema? (Hipótese e tese)	79
6.1.1	*Curiosidade: famosos e apaixonados por Matemática	87
7	Desvendando os teoremas - Parte II	89
7.1	Mais tipos de teorema	89
7.2	A generalização de um teorema	92
7.3	A família dos teoremas	95
7.3.1	Teoremas de existência e unicidade	98
8	Desvendando as definições matemáticas	101
8.1	O que é uma definição matemática?	101
8.1.1	Definições equivalentes	111
9	Modelos axiomáticos. Convenções matemáticas	115
9.1	Noções primitivas e axiomas	115
9.2	O modelo axiomático	118
9.2.1	Mais algumas palavras sobre modelos axiomáticos	120
9.2.2	Axiomatização da adição de números reais	122
9.2.3	*Curiosidade: o modelo axiomático em outras áreas	129
9.3	Convenções matemáticas	130

10	Conjecturas e contraexemplos	135
10.1	Conjecturas e contraexemplos	135
10.1.1	Demonstrações usando contraexemplo	139
10.1.2	*Curiosidade: a perfeição do conjunto vazio	141
10.2	Problemas envolvendo raciocínio lógico - III	142
11	Desvendando as demonstrações	145
11.1	O que é uma demonstração? (O raciocínio dedutivo)	145
11.2	Exemplo motivador da estrutura lógica de uma demonstração	146
11.3	Definição de demonstração	149
12	*Estratégias para demonstrar um resultado matemático	155
12.1	A redação de uma demonstração	157
12.2	O que fazer para demonstrar um teorema?	157
12.3	Pausa para uma observação pertinente	159
13	Técnicas de demonstração	161
13.1	Introdução	161
13.2	As técnicas mais simples de demonstração	162
13.3	Demonstrações utilizando a forma de representar um número	164
14	Quando é necessário saber negar (aprendendo a negar na Matemática)	171
14.1	Negação de sentenças envolvendo quantificadores	172
14.2	A negação de uma sentença condicional	174
14.3	Resumo da negação de sentenças	175
14.4	Método para negar sentenças com mais de um quantificador	177
15	Um pouco mais de Lógica. As demonstrações por casos	181
15.1	*Tautologias	181
15.1.1	*Curiosidade: um papo tautológico	182
15.2	Absurdos, contradições	182
15.3	**Tabelas-resumo das Leis do Cálculo Proposicional	182
15.4	Demonstração de teoremas com hipóteses e teses especiais	184
15.4.1	Teoremas cuja hipótese é uma sentença disjuntiva. As demonstrações por casos ou por exaustão	184
15.4.2	Teoremas cuja tese é uma sentença conjuntiva	185
15.4.3	Teoremas cuja tese é uma sentença disjuntiva	186
16	O absurdo tem seu valor! As demonstrações por redução a um absurdo	187
16.2	Redução a um absurdo	188

16.3	Demonstração direta <i>versus</i> demonstração por contradição	193
16.4	Quando usar a demonstração direta e quando usar a indireta?	194
17	Mais duas técnicas de demonstração	203
17.1	Não perca a tese de vista. A técnica “de trás para frente”	203
17.2	Uma outra técnica para demonstrar $H \Rightarrow (T_1 \text{ ou } T_2)$	205
18	Absurdo, resultados de existência, de unicidade	207
18.1	Demonstrações construtivas. O absurdo e os resultados de existência	207
18.2	Demonstração por absurdo para demonstrar resultados de unicidade	209
18.3	Redução ao absurdo e as demonstrações gratuitas	210
19	Demonstrações usando a contrapositiva	213
19.1	A contrapositiva de uma sentença	213
19.2	Redução a um absurdo <i>versus</i> demonstração usando a contrapositiva	215
20	Demonstrações em um modelo axiomático: um pouco de abstração	219
20.1	Trabalhando com demonstrações em um modelo axiomático	219
21	Demonstrações com o auxílio de figuras	229
22	Demonstrações por Indução. O método indutivo e o método dedutivo	235
22.2	Princípio de Indução: o infinito dominado!	236
22.3	*Raciocínio indutivo, generalizações	243
23	Sofismas, o cuidado com os autoenganos e com os enganadores!	247
23.1	*Sofismas	247
23.2	Seção desafio final: descubra se é demonstração!	252
24	Resumo e tabela-resumo das técnicas de demonstração	255
24.1	Resumo das técnicas de demonstração	255
24.2	Tabela-resumo das técnicas de demonstração	257
25	*Textos complementares de leitura	259
25.1	Conjecturas e problemas em aberto mais socialmente famosos	259
25.1.1	O problema das quatro cores	259
25.1.2	Até os gênios se enganam	260
25.1.3	A sensação do século passado: o Último Teorema de Fermat	261
25.1.4	Curiosidade: coisas da Matemática...	264
25.2	Alguns problemas em aberto de fácil entendimento	266
25.2.1	A Conjectura de Goldbach	266
25.2.2	Os primos gêmeos	266

25.2.3	Números perfeitos	266
25.2.4	Os números de Mersenne	267
25.2.5	Números amigos	269
25.2.6	Números de Fermat	269
25.3	Outros problemas em aberto	270
25.3.1	Dinheiro para quem resolver problemas matemáticos	270
25.3.2	Curiosidade: uma palestra silenciosa	271
25.4	Algumas cômicas demonstrações	271
26	Respostas e sugestões para os exercícios	273
	Referências	299
	Índice Remissivo	304

Prefácio

A ideia que nos fez escrever este livro foi a de preencher a lacuna de um texto que apresentasse os fundamentos básicos da Lógica Matemática, usando a própria Matemática. Visávamos um livro que pudesse ser usado por professores e por alunos do último ano do Ensino Médio, por alunos do primeiro ano das universidades, e por demais interessados.

É justamente quando entram na universidade que a maioria de nossos alunos se chocam ao se deparar com o formalismo e a abstração que requerem algumas das primeiras disciplinas de Matemática. O choque decorre, principalmente, de carências na formação dos alunos, de seus professores e de um Ensino Médio que, na maioria das vezes, não lhes fornece um preparo adequado e nem lhes treina para usar o raciocínio lógico dedutivo que posteriormente lhes será cobrado. Juntam-se a esse danoso fato alguns livros didáticos que trazem erros conceituais, a exemplo de não distinguir definições de demonstrações, além de provar fatos matemáticos com exemplos, fazer mal uso de notações, dentre outros disparates.

No âmbito das universidades, ainda temos o fracasso de certas disciplinas introdutórias de Lógica e de Fundamentos da Matemática, que deixam de ensinar como a Matemática realmente funciona, acabam se tornando improdutivas e não conseguem corrigir falhas do raciocínio lógico dos alunos ([42]) nem lhes preparar adequadamente para o Magistério ou para disciplinas mais adiantadas.

É necessário despertar nos professores do Ensino Médio e em nossos jovens alunos o espírito crítico, o raciocínio correto e o cuidado com a linguagem, para que repassem esses conhecimentos às próximas gerações e possamos, com isso, melhorar o ensino nesse aspecto.

Nosso objetivo neste livro é que, em curto intervalo de tempo, os leitores possam compreender como a Matemática funciona, como as ideias da Matemática surgem e se desenvolvem; que possam, também, aprender as principais técnicas de demonstração e comecem desde cedo a dar atenção ao mínimo de rigor que a Matemática demanda, aprendendo a se comunicar com uma linguagem clara, precisa e fundamentada na Lógica. Cremos que, quanto mais cedo um estudante puder ter acesso a esses conhecimentos, mais facilmente aprenderá vários outros

tópicos que irão aparecer ao longo de sua formação.

Tivemos a intenção de escrever o livro com uma linguagem cativante e leve. Trabalhamos com diversos casos reais de erros e dificuldades em relação ao ensino e à aprendizagem de Matemática, que alunos e professores encontram em livros didáticos e que enfrentam nas salas de aula e em seus cotidianos. Também objetivamos despertar a curiosidade dos leitores para vários tópicos que julgamos interessantes, tanto da Matemática como de sua história.

Para ler o livro, são necessários, basicamente, conhecimentos matemáticos do Ensino Médio, principalmente os da Teoria Elementar dos Números e os da Geometria Plana.

O texto destina-se a ser usado em disciplinas iniciais de Fundamentos de Matemática, de Lógica Matemática (elementar), de Resolução de problemas, em cursos de preparação para Olimpíadas de Matemática, de aperfeiçoamento para professores dos Ensino Fundamental e Médio e em outros cursos de natureza semelhante.

Aos leitores, ressaltamos os seguintes fatos:

- Para explicitar que estamos fazendo uma definição, as palavras que denominam um objeto serão grifadas em fonte negrito.

- As palavras estrangeiras estão escritas em itálico. Visando um melhor entendimento do texto, sentenças matemáticas e algumas palavras também estão em itálico.

- Para dar o mínimo de formalismo e manter nossa proposta, tivemos de explorar noções intuitivas que os leitores certamente possuíam de certos temas e, por vezes, fomos impelidos a fazer uma introdução ingênua de outros. Mas, no momento oportuno, esses temas foram devidamente formalizados e detalhados.

- Algumas referências, mesmo não citadas nos capítulos, são sugestões para consultas posteriores e constam na Referência Bibliográfica.

- Os exercícios se propõem contemplar os mais diversos casos em que possam se apresentar os temas estudados.

- Algumas citações usadas no começo dos capítulos foram tiradas do Mathematical Quotation Server, na página eletrônica

<http://math.furman.edu/~mwoodard/mquot.html>

e traduzidas livremente para o Português pelo autor.

A leitura do artigo [54] talvez tenha sido uma de nossas primeiras motivações para escrever este livro. A Revista do Professor de Matemática (RPM) e a coleção [47], ambos editados pela Sociedade Brasileira de Matemática, foram, além de inspiração, razão de vários temas abordados ao longo do texto. Utilizamos a última referência como fonte para criar vários exercícios baseados em fatos reais, com o intuito de desenvolver o senso crítico dos leitores em relação aos livros didáticos e à maneira como esses livros abordam certos tópicos de Matemática.

Agradecemos aos seguintes colegas por sugestões e correções: Ângelo Roncalli, Antônio Brandão, Claudianor Oliveira Alves, Daniel Pellegrino, Francisco Júlio de Araújo Corrêa, Lúcio Guerra, Marcelo Martins dos Santos, José Iraponil Costa Lima, Samuel Duarte, Sinval Braga, Tomás Edson Barros, Vandik Estevam e Alan de Araújo Guimarães. Agradeço ao professor José Lindomberg Possiano Barreiro pela ajuda com o \LaTeX e pela confecção das figuras. Agradeço ainda, profundamente, a um parecerista anônimo pela leitura técnica e por suas valiosas opiniões para melhorar o texto.

Sugestões para leitura e uso do livro:

1. Os capítulos, seções ou subseções marcados com um asterisco (*) podem ser suprimidas em uma primeira leitura, sem que se altere a proposta principal do livro. Esses tópicos podem ficar para leitura individual complementar ou para serem apresentados pelos próprios alunos, como algum trabalho da disciplina na qual o livro esteja sendo usado. Essa sugestão não significa que esses tópicos não sejam importantes na formação dos alunos!

2. Os capítulos, seções ou subseções marcados com dois asteriscos (**) abordam tópicos essencialmente de Lógica e podem também, com o devido cuidado, ser omitidos para um uso mais rápido do livro.

Contamos que nos enviem sugestões, nos apontem falhas e erros para que possamos melhorar nosso texto. Usem o endereço: demoraisfilho@gmail.com

Campina Grande, março do ano de 2012

Prefácio da segunda edição

Esta segunda edição foi revisada e atualizada.

Agradecemos aos leitores, espalhados pelo nosso imenso país, que bem acolheram o livro e nos incentivaram a continuar aprimorando-o.

João Pessoa, Praia de Cabo Branco – ponto mais oriental das Américas
Janeiro e fevereiro do ano de 2013

Prefácio da terceira edição

Nesta terceira edição, atualizada, fizemos algumas correções e modificações.

Mais uma vez, agradecemos a acolhida que o livro tem entre nossos colegas, professores, alunos e interessados.

Fraterno abraço a todos.

Campina Grande, maio do ano de 2016

Daniel Cordeiro de Morais Filho

